茨城大学教育実践研究 29(2010),17-31

*

‘向き’によって統合を図る考えの数学教育的意義

安島州平*

多田典子**・三浦利江***・今瀬智洋****・山田勝一*****・嶋田和美******・根本　博*******

（2010 年 9 月 15 日受理）

‘Direction Based Concept Unification’ as a Method of Understanding Mathematics in Education

Syuhei AJIMA

Noriko TADA, Toshie MIURA, Tomohiro IMASE, Katsuichi YAMADA

Kazumi SHIMADA and Hiroshi NEMOTO

キーワード：‘向き’　統合的な考え　思考の節約

算数･数学教育は，与えられた問題の答えを求めることだけでなく，主体的に学習に取り組み，数学的な思考力や表現力を生かして，合理的な社会生活を営むことができる人間の育成を目指している。本稿は，この「人間の育成」という視座から，算数・数学教育の目指すところを改めて見直そうとするものである。かつて，数学教育の現代化運動 *modernization* の際に，一見個別独立の事象や事柄に共通する面を積極的に見いだし関連付けて考えようとする「統合･発展」が盛んに論じられたことがあった。これは，冷静に事象の本質を見極め，粘り強く考える人間の育成に繋がると考えるものである。ここでは，思考手段として‘向き’を導入することで，学習内容についてより高い次元から眺め，関係的･包括的理解を促すことができる幾つかの事例を掲げ，併せてその重要性を述べた。

はじめに

算数・数学の学習では，多くの子どもが問題を解決しさえすれば学習は完了したと思っているように思われる。解決し満足している子どもにとって理解は深まっているのだろうか，また，学び続けていこうとする姿勢は育っているのだろうか，さらに，子どもは算数・数学を学ぶことの楽しさを実感しているのだろうか，そんな疑問が頭をよぎる。

もちろん，既習事項を大いに活用し，「図形のここに１本，直線を描いて考えてみよう」とか「こうすれば整数の時と同じように計算ができる」など，数学的思考を活用して課題に挑戦してくる子どもも中にはいる。

G.Polya(G.ポリア, 1887－1985)は，問題を解く思考過程を四つに区分して分かりやすく説明している。中でもその第２番目の段階では「データと未知のものとの関連を見つけなければならない。」と述べている [1)]。つまり，問題を解く際には，必要な材料を既存の知識の中から適当に選択し，未知である求めるべき結果と関連付ける作業が求められるということである。

---

*水戸市立国田中学校 **高萩市立松岡中学校 ***常総市立菅生小学校 ****水戸市立渡里小学校 *****茨城町立明光中学校 ******軽井沢町立軽井沢中学校 *******茨城大学教育学部

我が国でも,「数学教育の現代化」の思想を背景に算数･数学教育の目標として,「統合的, 発展的考察」という観点で問題を追究し, これを一般化して考えることで, より高い立場から本質を抽出し, 構造的にとらえようとする「数学的な考え方」を推進した時代があった。その後, この‘現代化’への批判や反省がなされ, 算数･数学科の目標から文言は消えることになったが, この「統合的, 発展的考察」は算数･数学教育でなお重要で, 依然として底流する考え方であると考える。

そこで, 本稿では, とりわけ「向き」という *idea* によって, 学習する内容（問題）に共通な構造や本質を見いだし統合を図る事例を挙げるとともに, より一般的なものにまとめようとする思考の整理, そして思考の節約を子どもに味わわせる方策を探り, さらに,「統合」して考えることの数学的意義を理解し, その「よさ」を実感できるようにすることの重要性を述べる。

１「統合的な考え」*unification* の意味

本節ではまず, 一時ほど耳にすることが少なくなった「統合的な考え」について,「学習指導要領」を少し遡り, これを手がかりに歴史的背景を整理しておくことにする。

１）数学教育における「統合的な考え」の歴史的背景

①　数学教育の現代化（昭和 43 年の学習指導要領の改訂）と「数学的な考え方」

昭和 43 年の教育課程の改善にあたって開催された教育課程審議会の答申では,「現代の数学教育の発達を考慮して, 数学的な考え方がいっそう育成されるようにすること」という表現でその方向が示されている。数学的な考え方のいっそうの充実のための具体的な措置の一つに, 総括目標によって,「数学的な考え方」としてふさわしい創造的な活動の姿を具体的に示したことがあげられる。ちなみに算数科の総括目標は

> 日常の事象を数理的にとらえ, 筋道立てて考え, 統合的, 発展的に考察し, 処理する能力と態度を育てる。

となっている。これは, 算数・数学科において究極的に目指すものが, この「数学的な考え方」としてあげている創造的な能力, 態度であることを示していることになる。特に,「統合的発展的な考察」は数学的な創造にかかわる重要な観点であり,「数学的な考え方」の育成という立場できわめて重要な意義をもつものである。「統合」という観点を目標に掲げたということは, 子どもに統合する能力や態度を育成することを算数・数学教育のねらいとしたということである。

②　昭和 52 年の学習指導要領の改訂と「数学的な考え方」

この学習指導要領で示された算数科の目標は, 次のように改められた。

> 数量や図形について基礎的な知識と技能を身につけ, 日常の事象を数理的にとらえ, 筋道を立てて考え, 処理する能力と態度を育てる。

従前の「数学的な考え方」を受けた目標の後半では, 従前の場合にあった「統合的, 発展的な考察」ということばだけが削除されていることに大きな問題があることを指摘しておく。「数学的な考え方」は, 一言でいえば, 算数・数学にふさわしい創造的な活動ができることである。

これについては, どんな価値観のもとに課題をつかみ, どんな方向に探究し改善を図ることが,

算数・数学でねらう「創造」であり「発展」であるのかを示す観点が必要である。これにあたるものとして，従前の総括目標では，その代表的なものとして「統合」という観点をあげていたわけである。この「統合の考え」は，数学的な考え方にふさわしい創造的な活動をさせる場合，それを評価する中核になる観点と考えてもよい。また，この観点は，学習した成果について，その観点からのすばらしさを味わわせる上にも必要なことである。特に，算数・数学の学習を通して，人間性を豊かにすることをねらうためには，これらの観点に立って，子どもの価値観を育成し，その多様化を図っていくことが大事なポイントでもある。

従って，その観点だけを削除して示すということは，そうした理解を推進する上で適切な措置とはいえない。この「統合」といった観点は，単に「数学的な考え方」の育成という立場だけでなく，算数・数学の内容について系統立った学習指導を進め，内容の精選と指導の能率の向上を図っていく上にも，重要な観点である。目標の表面からは消えたが，算数・数学の研究と指導に当たって，常に忘れないようにしたい。

③　数学的な考え方としての「統合・発展の考え方」

文部省「小学校指導書　算数編」(昭和 44 年)には，次のような解説がある[2)]。

・発展的な考え：	ものごとを固定的なもの，確定的なものと考えず，絶えず，新たなものにし，発展させようとする考えである。
・統合の考え　：	処理の方法が同じ文脈のことばで表現されるものには，同じ形式を与えるようにするために，前のものと新しく生み出したものを包括的に扱えるように意味を規定したり，処理の考え方をまとめたりする考えである。

この「発展的な考え」は，算数に限ったことではなく，すべての学問，すべての「学び」にとって不可欠な考え方である。また，この「統合の考え」は，「発展的な考え」を促し，生み出していくための有力な動因になり得る考えである。これらは，算数学習の本質を形成するものであり，これらを欠いた算数は有り得ないと言っても過言ではない。現在の算数教育にとって，この「統合・発展の考え方」は，単に数学的な考え方の一つとしてではなく，算数教育の基底を形成するものとして，前面に出して，その復権をはかるべき時なのである。

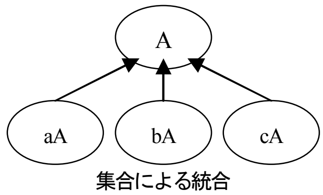
２）具体的な「統合的な考え」の意味　～主要な三つの場合について～ [3)]

「統合的な考え」については，昭和 44 年度の学習指導要領の改訂に伴い，多くの研究実践がなされ，統合の意味が具体的な形で把握されてきている。

ここでは，中島健三(1981)の述べる『「統合」の意味』を主要先行研究としてとらえ，「統合」の具体的な意味について，同氏の指摘する三つの場合を含むように考えたい。

①　集合による統合

はじめは，異なったものとしてとらえられていたものについて，ある必要から共通の観点を見いだして一つのものにまとめる場合。「ａＡ」「ｂＡ」「ｃＡ」とそれぞれ異なった事柄と考えていたものを「A」という共通点(概念)に目をつけ同じ考え方「A」としてまとめていく。



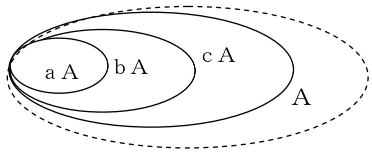
集合による統合

例えば，2，4，6，…の集合を「偶数」としてまとめるなど，一つの概念でまとめる場合や，下記のそれぞれの異なる対象の計算と考えていたものが「それぞれの単位どうしのたし算で処理できる（単位相互の関係もはっきりしている)」という共通点に目をつけ，同じ考え方の計算としてとらえることがこの考えに含まれる。

項　目	計　算	単　位
２けたの数の計算	23＋45	(10の位)と(１の位)
帯分数の計算	$2\frac{3}{5}+4\frac{1}{5}$	(1)　と　$\left(\frac{1}{5}\right)$
時間の計算	２時間30分＋４時間10分	(時間）と（分)

② 拡張による統合

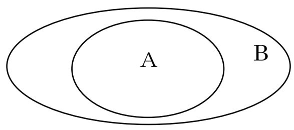
はじめに考えた概念や形式が，もっと広い範囲(はじめの考えでは含められない範囲のものまで)に適用できるようにするために，はじめの概念の意味や形式を一般化し，もとのものも含めてまとめる場合。



「a A」の事柄が拡張された「b A」の事柄，さらには「c A」の事柄で，はじめに考えた概念や形式が，広い範囲に適用できるようにするために，「A」という概念の意味や形式を一般化する。

例えば，１位数どうしについて考えた計算が，２位数，３位数でも使えるようにする場合は，この最も卑近な場合である。また整数でのかけ算が，小数，分数の場合にも考えられるようにするのも，この典型的な場合であると考える。

③ 補完による統合



すでに知っている概念や形式だけでは，適用できない場合が起こるとき，補うものを加えて「完全になる」ようにまとめる場合。

「A」という概念の意味や形式では，適用できない。「A」を含む「B」で補い「完全になる」ようにまとめる。

例えば，たし算，かけ算に対して，ひき算やわり算を考え出すときや，比例に対して反比例を考え出すようなときなどがこれにあたると考える。

中島健三(1981)は，『「統合」の意味』の中で，

> 算数・数学では，この②の場合の「統合」がきわめて多く，これが「系統的」といわれる所以でもあるわけである。この点は，指導の上でも重要なことで，たとえば，上の①の例としてあげた計算の場合，はじめに異なった計算として教えてかかって，あとでまとめるよりは，むしろ，次々に②の形式での統合になるような指導が，能率的でもあり教育的には望ましい場合が多い。
>
> この意味で，①の形式の統合か，②の形式の統合かは，教育内容だけできまることではなく，それを取り扱う側での指導の方法にもよるわけである。
>
> 〈中略〉
>
> ③の形式で考え出されたことは，概念や形式の抽象または一般化によって，① または②の形式で，あとで統合し直すことが多い（わり算を逆数のかけ算として「かけ算」にまとめたり，反比例を「逆数に比例」

するとしてまとめてみたりすることが，これにあたる)。

以上のように，「統合」ということは，新しく特別のことを考えるというよりは，日常の指導でつねに行われているべきことである。問題は，教師が，子どもが，どんな目で教材に取り組んでいるかということにかかっているともいえる[4]。

註) 文献において①②③の表記はⓐⓑⓒとされている。

と論じ，この考え方による指導の教育的価値を示し，日常の指導で常に行われるべきことであることを主張し，課題は，「教師が，子どもが，どんな目で教材に取り組んでいるかということ」であると述べている。

3）‘向き’によって「統合的な考え」を図る事例 ― 同じ形式でまとめる ―

では，この「統合的な考え」をもとにし，教師が，子どもが，どんな目で教材に取り組んでいくべきなのかということに関する事例を挙げてみたい。

次の図1，図2のような三角形ＡＢＣの面積を求める場面を考えてみる。

図1，図2のようにＡから底辺ＢＣに下ろした垂線をＡＤとして，二つの三角形（△ＡＢＤ，△ＡＤＣ）を使って考えると，図1の三角形ＡＢＣの面積は，二つに分けた三角形の面積の和（△ＡＢＣ＝△ＡＢＤ＋△ＡＤＣ）で求められ，図2の三角形ＡＢＣは，△ＡＢＤと△ＡＣＤの面積の差（△ＡＢＣ＝△ＡＢＤ－△ＡＣＤ）で求めることができる。

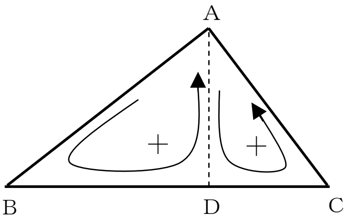


図1

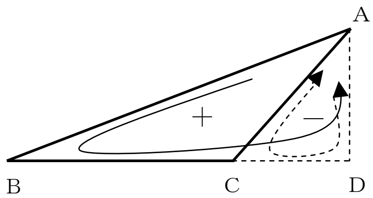


図2

$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$

$\triangle ABC = \triangle ABD - \overrightarrow{\triangle ACD} = \triangle ABD + \overleftarrow{\triangle ADC}$

$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$

しかし，ここで図1の二つの三角形を，頂点Ａから出発して△ＡＢＤ，△ＡＤＣの辺をたどっていき，反時計まわりの‘向き’になるものを「＋」と考える。

また，図2の三角形にも，図1と同様に‘向き’に一貫性をもたせ，辺をたどっていくと△ＡＢＤは「＋」となり，△ＡＤＣは，時計まわりの‘向き’となるので「－」と考えられる。

そうすると，図2の三角形ＡＢＣの面積では，△ＡＢＣ＝△ＡＢＤ－△ＡＣＤと求めていたが，△ＡＤＣは，時計まわりの‘向き’で，△ＡＤＣは，「－」と考えるので，「－△ＡＣＤ＝－（－△ＡＤＣ)」となり，図2の三角形ＡＢＣの面積を求める場面でも，△ＡＢＣ＝△ＡＢＤ＋△ＡＤＣで求められることが分かる。

つまり，三角形ＡＢＣにおける△ＡＢＤ，△ＡＤＣのように，辺をたどり‘向き’を確認することで，図1，図2の二つの関係は，異なる場面でも同じ形式でまとめることができる。

このような，鋭角三角形の求積と高さが図形の外部にある鈍角三角形の求積の考え方に，‘向き’を確認することで，異なる場面でも同じ形式でまとめることで一貫性をもたせ，統合的に考えていく考え方のことを‘向き’によって統合を図る考えとする。

‘向き’に焦点をあて統合を図る考え方の例をさらに挙げてみたい。

$\boxed{\ell /\!/ m\text{のとき，}\angle \mathrm{APB}=x\text{ は，点Pがどの位置にあっても }x=\mathrm{a}+\mathrm{b}\text{ で表せることを説明する。}}$

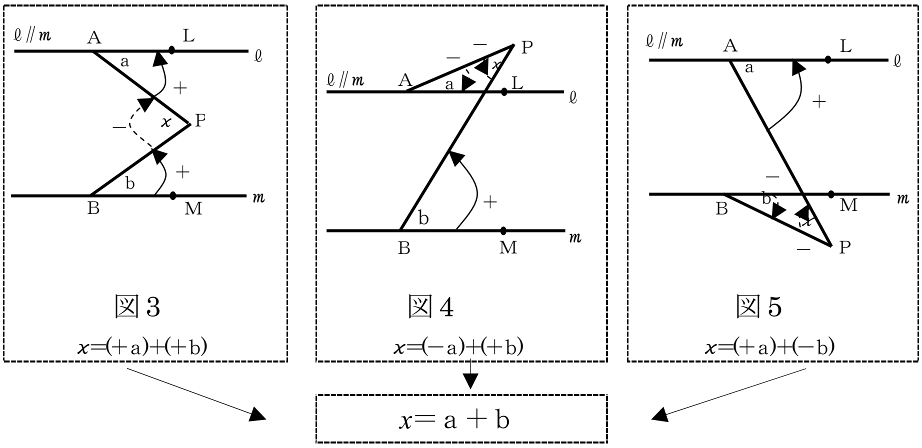


図３　$x=(+\mathrm{a})+(+\mathrm{b})$　　図４　$x=(-\mathrm{a})+(+\mathrm{b})$　　図５　$x=(+\mathrm{a})+(-\mathrm{b})$

$x=\mathrm{a}+\mathrm{b}$

図 3 の∠ＰＢＭは頂点Ｂを中心として線分ＢＭが反時計まわりに線分ＢＰまで回転した角とし，その角は＋ｂとなる。

次に，線分ＢＰが頂点Ｐを中心として線分ＡＰまで時計まわりに回転した角を∠ＡＰＢとし，その角は$-x$ となる。∠ＰＡＬは，頂点Ａを中心として線分ＡＰが反時計まわりに回るので,＋ａとなり,線分ＢＭから回転が始まって,線分ＡＬで回転が終わる。角の回転が元に戻るので，$(+\mathrm{b})+(-x)+(+\mathrm{a})=0°$ になる。

図４，図５も同じ考えで角を回転していくと，$\angle x=\angle \mathrm{a}+\angle \mathrm{b}$という形で表される。つまり‘向き’を定義すると，平行線の外部の場合でも‘向き’を変えた一つの加法の式で表すことができる。

以上のことから，角の回転する‘向き’(反時計まわりを＋，時計まわりを－)を決め，ある基準(頂点Ｂから線ＢＭ)から角の回転でつないでいくと，全体の角の大きさを加法で表せる。（この場合は，角を回転させていくと，角の回転が元に戻り，0°となる。）

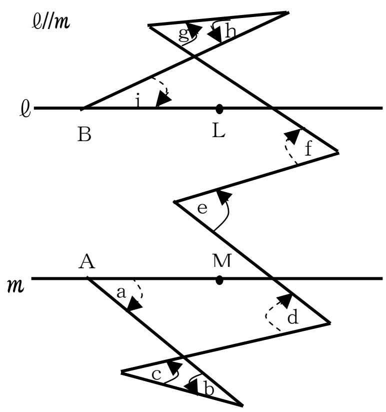


図６

例えば，図６の場合でも，反時計まわりを＋，時計まわりを－と決めると，

$(-\mathrm{a})+(+\mathrm{b})+(+\mathrm{c})+(-\mathrm{d})+(+\mathrm{e})+(-\mathrm{f})+(+\mathrm{g})+(+\mathrm{h})+(-\mathrm{i})=0°$ となる。

よって，ℓ∥mのとき，$\angle \mathrm{APB}=x$ は，点Ｐがどの位置にあろうと，$x=\mathrm{a}+\mathrm{b}$という一つの式で表せることが分かる。

このように‘向き’の考えをもとにした「統合的な考え」は，課題が異なる場面でも，同じ形式でまとめ問題解決ができる一つの考え方である。

つまり，一見異なる場面の事実を，同じ形式で一つにまとめることができる概念であり，まさに「思考の節約」といえる考え方である。

この考え方を，指導に取り入れていくことで，与えられた法則や公式を覚えさせるのではなく，また，単にその適用による問題の解決でなく，積極的に関連を図って事象の中に関係を見いだそう

とするなど，関係 *relationships* を考察する数学的活動の実現が可能になる。

２　算数・数学科における指導事項に即した事例

ここでは，教師が，そして子どもが，‘向き’の考えをもとにした統合を図るための教材を小学校，中学校，高等学校の事例で示すことにする。

１）小学校 算数科

小学校算数では，負の数を扱っていない。したがって，「負の方向」の状況について，理解できないと考えられる。‘向き’の考えをもとにした統合を図るための教材の提示が困難なので，ここでは異なる場面を一つにまとめて考えていく統合的な考えの事例を示すことにする。

◇単元名；第１学年「たし算」と「ひき算」，第２学年「たすのかな　ひくのかな」

①　単元における「統合的な考え」について

第１学年の「たし算」と「ひき算」では，合併や増加が「たし算」であること，求算や求差が「ひき算」であることを理解する。

また第２学年の「たし算」と「ひき算」では，それぞれのたし算やひき算を部分と全体の関係として見直すことによって，同じ構造になっていることを学習する。この意味の学習を図に表して視覚的にとらえさせることを通して統合的な考えを大切にしたい。

たし算では，「合併」と「増加」と二つの場面が違っていても，部分と部分から全体を求めることは同じ構造になっていることから，統一的に「たし算」として見ることができるようになる。テープ図や線分図を用いて，数量の関係を視覚的にとらえさせることが大きな手助けとなる。

また，現行では，第２学年の終わりの段階で，「たし算」と「ひき算」の二つの異なる計算の手段の相互関係を学習するときに，図を用いて部分と全体との関係から，たし算とひき算は互いに逆の関係になっているという統一的な理解へと深めることが学習場面で統合的な考えになる。

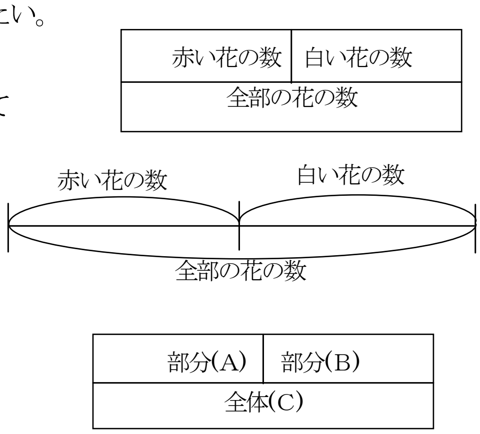


図７

Ａ＋Ｂ＝Ｃ　⇔　Ｃ－Ａ＝Ｂ，Ｃ－Ｂ＝Ａ

②　指導上の配慮事項

加法と減法の相互関係は，上記の図７のようにＡとＢと分かっていてＣを求める場合は，Ａ＋Ｂ＝Ｃ，Ｂ＋Ａ＝Ｃと加法で求めることになる。ＣとＡが分かっていてＢを求める場合は，Ｃ－Ａ＝Ｂ，ＣとＢが分かっていてＡを求める場合は，Ｃ－Ｂ＝Ａと減法で求めることになる。

つまり，Ａ，Ｂ，Ｃの３つのうち二つが分かれば，残りは加法または減法の式に表すことができ，他の分かっていない一つは，逆に減法または加法で求めることができる。したがって，加法や減法がどのような場合に用いられるかを十分に理解させなければならない。加法，減法が用いられる場

合については，主として第１学年，第２学年で指導することになる。１年生で指導するものを，２年生で数の範囲を広げて適用することが大切である。

２）中学校数学科

◇単元名；第１学年「正の数・負の数」

中学校第１学年の「正の数，負の数」の指導において，図式化された計算の仕組みで‘向き’を確認し，異なる場面でも同じ形式でまとめる考えの事例を示したい。

①‘向き’の考えを取り入れた内容について

「正の数・負の数」の単元展開は，導入で，０より小さい数があることを知り，反対の性質を持つもの，基準とした量の増減，過不足を具体的事象で負の数の概念を深めていき，絶対値や不等号の表し方などの知識を得る。そして，具体的事象から負の数の加法減法を理解し，さらに乗除の学習へと展開されていく。

この正負の数の加減の意味指導において，‘向き’の考え方を取り入れながら，考察の場面を統一化し，統合的な考えを用いてみる。

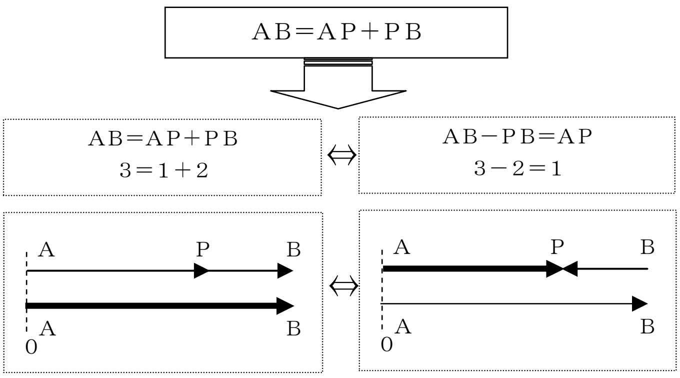


図８

正負の数の加法，ＡＢ＝ＡＰ＋ＰＢを左図８のように図式化する。右向きを正の方向（＋），線分ＡＢは，和と考え，‘向き’をＡ→Ｐ，Ｐ→Ｂの順序で和を表す線分ＡＢを確認する。

また，減法の場面において，左図のように，右向きを正の方向（＋）として，ひかれる数がＡＢ，ひく数ＢＰ（ひくことで‘向き’がＢＰと逆になる），線分ＡＰを差として，‘向き’は，Ａ→Ｂ，Ｂ→Ｐの順序で差を表す線分ＡＰを確認する。

つまり，減法も加法と同じＡＢ＝ＡＰ＋ＰＢの一つの式にまとめることができる。具体的な指導場面を提案する。正負の数の加法の指導について，右のような「加法の一覧表」を完成させることから正負の数の加法の計算指導を行う。

加法		たす数										
		…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
たされる数	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	4	…	**0**	1	2	3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	…
	3	…	-1	**0**	1	2	**3**	4	**5**	**6**	**7**	…
	2	…	-2	-1	**0**	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	…
	1	…	-3	-2	-1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	…
	0	…	-4	-3	-2	-1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	…
	-1	…	-5	-4	-3	-2	-1	**0**	1	2	3	…
	-2	…	-6	-5	-4	-3	-2	-1	**0**	1	2	…
	-3	…	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	**0**	1	…
	-4	…	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	**0**	…
	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

正負の数・加法の一覧表

図９のように，右向きを正の方向(＋)，線分ＡＢの量（絶対値）と‘向き’(符号)を，和と考える。‘向き’をＡ→Ｐ→Ｂの順で，線

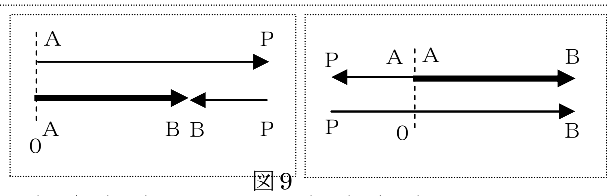


図９

(＋4)+(−2)＝2
(＋3)+(−1)＝2

(−1)+(＋3)＝2
(−2)+(＋4)＝2

分ＡＢの量と‘向き’の確認をする（ＡＢ＝ＡＰ＋ＰＢ）。

下の図 10 のような (正)+(負)，(負)+(負)，(負)+(正) も，同様にして確認する。

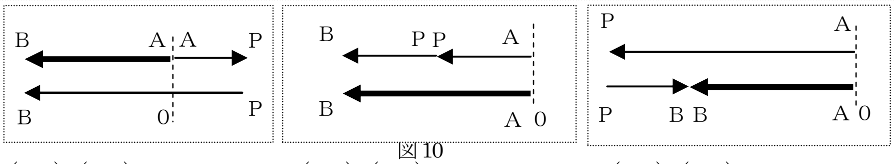


図10

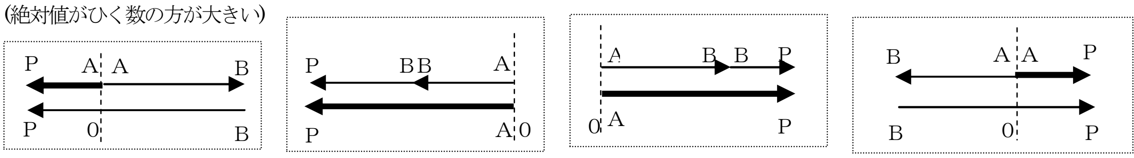
(＋2)+(−4)=−2　(−1)+(−1)=−2　(−3)+(＋1)=−2

次に減法の指導場面であるが，加法の指導同様に，下表の「減法の一覧表」を作成し，考察する。‘向き’の確認（ＡＢ－ＰＢ＝ＡＰ）右向きを正の方向（＋），線分ＡＰの量と‘向き’を差，ひかれる数がＡＢ，ひく数ＢＰ（ひくことで‘向き’がＢＰと逆になる）と考え，‘向き’は，Ａ→Ｂ，Ｂ→Ｐの順序で線分ＡＰの量と向きを差とする。　(図 11 参照)

減法		ひく数										
		…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
ひかれる数	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	4	…	8	7	6	5	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	…
	3	…	7	6	5	4	**3**	**2**	**1**	**0**	-1	…
	2	…	6	5	4	3	**2**	**1**	**0**	-1	-2	…
	1	…	5	4	3	2	**1**	**0**	-1	-2	-3	…
	0	…	4	3	2	1	**0**	-1	-2	-3	-4	…
	-1	…	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	…
	-2	…	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	…
	-3	…	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	…
	-4	…	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	…
	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

正負の数・減法の一覧表

ア) (正)−(正)　(絶対値がひく数の方が大きい)　イ) (負)−(正)　ウ) (正)−(負)　エ) (負)−(負)



(+2)−(+3)＝(−1)　(−2)−(+4)＝(−6)　(+2)−(−3)＝(+5)　(−2)−(−4)＝(+2)

図 11

②　指導上の配慮事項

‘向き’によって統合を図る考え方は，何と何が対応していることをはっきりさせ，‘向き’を確認することが大切である。‘向き’を確認する場面では，線分ＡＢの数量が何なのか，Ａ→Ｐ，Ｐ→Ｂのように記号の並び，向かっていく順番を大切にし，生徒自身が確認できるようにする。

加法，減法，乗法，除法の学習へと単元展開が進んでいく。生徒の思考の段階，「ここまでは，何を理解し，分かっているのか。」整理しながら分かっていることを関係付けて思考を進めていくよう留意したい。

このように中学校第１学年の「正の数・負の数」の学習で，‘向き’の考えを取り入れることで，今まで異なって見えていた加法も減法も同じ形式に整理することができる。

◇単元名；第３学年「式の計算」式の利用

次に，中学校で，発展的な学習内容として扱える事例を挙げることにする。第３学年「式の計算」

の「式の利用」の学習場面において，長方形ＡＢＣＤの内部にある四つの三角形の面積について，Ｓ１＋Ｓ２＝Ｓ３＋Ｓ４の関係が常に成り立つ事例である。

①‘向き’の考えを取り入れた内容について

長方形ＡＢＣＤがある。点Ｐの位置が次の⑴〜⑶のとき，面積の関係を調べる。

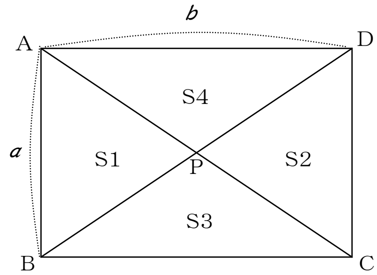
⑴ 図12のように，点Ｐが長方形の対角線の交点であるとき

△ＡＢＰ（頂点Ａ→Ｂ→Ｐ）の方向，反時計回りを正の‘向き’とする。
△ＢＣＰ（頂点Ｂ→Ｃ→Ｐ）の方向，反時計回りを正の‘向き’とする。
△ＣＤＰ（頂点Ｃ→Ｄ→Ｐ）の方向，反時計回りを正の‘向き’とする。
△ＤＡＰ（頂点Ｄ→Ａ→Ｐ）の方向，反時計回りを正の‘向き’とする。

長方形の辺ＡＢ＝a，ＢＣ＝b，
△ＡＢＰ＝Ｓ１，△ＣＤＰ＝Ｓ２，
△ＢＣＰ＝Ｓ３，△ＤＡＰ＝Ｓ４とすると，

$$S1+S2=\frac{ab}{2}$$

$$S3+S4=\frac{ab}{2}$$



∴　Ｓ１＋Ｓ２＝Ｓ３＋Ｓ４

図12

⑵ 図13のように，点Ｐが長方形の内部にあるとき
　点Ｐからそれぞれの辺に垂線をひく。交点をＥ，Ｆ，Ｇ，Ｈとし，線分ＰＥ＝x，ＰＧ＝y，ＰＨ＝m，ＰＦ＝nとすると，

$$S1+S2=\frac{ax}{2}+\frac{ay}{2}=\frac{a(x+y)}{2}=\frac{ab}{2}$$

$$S3+S4=\frac{bn}{2}+\frac{bm}{2}=\frac{b(n+m)}{2}=\frac{ab}{2}$$

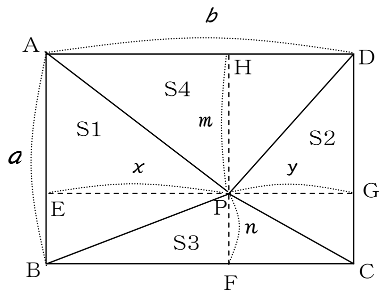


図13

∴　Ｓ１＋Ｓ２＝Ｓ３＋Ｓ４

⑶ 図14のように，点Ｐが長方形の外部にあるとき，線分ＰＱ＝c　とする。

等積変形より，$S3+S4=\frac{ab}{2}$

$S1=\frac{a(b+c)}{2}$　　$S2=\frac{ac}{2}$

　点Ｐが長方形ＡＢＣＤの内部から辺ＣＤ上に向かって動くとき，△ＣＤＰ(Ｓ２)は減少していく。
　そして，辺ＣＤ上で面積が０になる。だから，点Ｐが

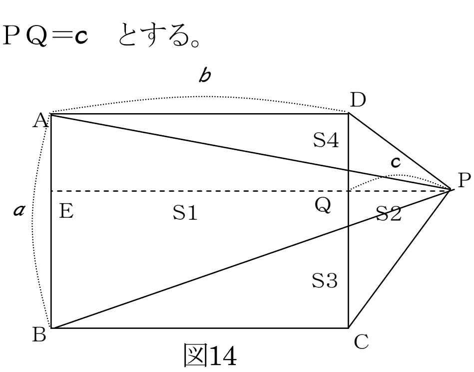


図14

長方形ＡＢＣＤの外部にでたときは，減少していく(－になる)。

よって，　Ｓ１－Ｓ２＝ $\dfrac{a(b+c)}{2}-\dfrac{ac}{2}=\dfrac{ab}{2}$

ここで，‘向き’を考えると，Ｓ１＋Ｓ２＝$\dfrac{a(b+c)}{2}+\left(-\dfrac{ac}{2}\right)=\dfrac{ab}{2}$

∴　Ｓ１＋Ｓ２＝Ｓ３＋Ｓ４

以上の⑴, ⑵, ⑶の考察から，点Ｐがどの位置にあろうとも‘向き’を考えると，
常に，Ｓ１＋Ｓ２＝Ｓ３＋Ｓ４が成り立つと主張できることになる。

②　指導上の配慮事項

文字を使って，点Ｐが長方形の対角線の交点であるとき，また，内部にあるときを調べる。点Ｐによって分けられた面積Ｓ１，Ｓ２，Ｓ３，Ｓ４の関係はＳ１＋Ｓ２＝Ｓ３＋Ｓ４の関係が成り立つ。さらに，点Ｐが四角形ＡＢＣＤの外部にあるときを調べる。ここで，‘向き’による考えを取り入れることで，面積の関係をより簡潔，明瞭にしていきたい。⑶の場合は，Ｓ２の△ＣＤＰの‘向き’が反時計回り（＋）から時計回り（－）に変わる。

その符号を考えると，Ｓ１＋Ｓ２＝$\dfrac{a(b+c)}{2}+\left(-\dfrac{ac}{2}\right)=\dfrac{ab}{2}$＝Ｓ３＋Ｓ４の関係が成り立ってくる。

生徒は三角形の面積の関係をとらえやすくなり，点Ｐが四角形ＡＢＣＤの内部または外部のどこにあってもＳ１＋Ｓ２＝Ｓ３＋Ｓ４の関係が成り立つことに気付いていくだろう。

３）高等学校数学科

◇単元名；数学Ⅱ「(図形と方程式) 線分の内分点・外分点」

ここでは，高等学校数学科数学Ⅱ「図形と方程式」線分の内分点・外分点の座標を求める際の事例を挙げることにする。

①‘向き’の考えを取り入れた内容について

内分と外分の場合でも‘向き’を統合して考えると，加法，減法と分けずに別々の計算という意識をもたないでもよいことになる。

ここでは，内分点・外分点の座標を求めるにあたり，別々な二つの式としてみるのではなく，同一の考えのもとに関連付けるという「統合の考え」でみることにする。

座標平面上の２点Ａ，Ｂに対して，線分ＡＢを $m:n$ の比に分ける点Ｐ$(x,\ y)$を求める。

m, n を正の数とする。線分ＡＢ上に点Ｐがあり，

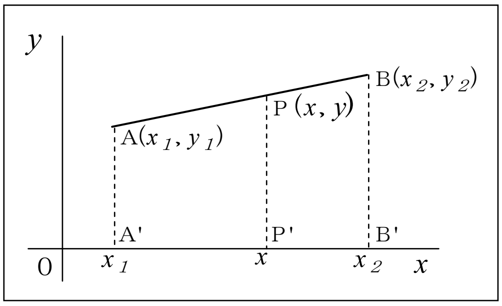
ＡＰ：ＰＢ＝$m:n$

が成り立つとき，点Ｐは，線分ＡＢを $m:n$ の比に**内分**するという。

また，線分ＡＢの延長上に点Ｐがあり，

ＡＰ：ＰＢ＝ m： n (ただし， $m \neq n$)

が成り立つとき，点Ｐは，線分ＡＢを $m:n$ の比に**外分**するという。



座標平面上の２点Ａ (x_1, y_1)，Ｂ (x_2, y_2) に対して，線分ＡＢを m： n の比に内分する点Ｐの座標 (x, y) を求める。

直線ＡＢが x 軸に垂直でない場合，Ａ，Ｂ，Ｐから x 軸に，それぞれ垂線ＡＡ’，ＢＢ’，ＰＰ’を引くと，

Ｐ’は線分Ａ’Ｂ’を $m:n$ の比に内分する。

よって $|x-x_1| : |x_2-x| = m:n$

このとき，x は x_1 と x_2 の間にあるから，$x-x_1$ と x_2-x は同符号である。したがって，

$(x-x_1):(x_2-x)=m:n$

ゆえに， $n(x-x_1)=m(x_2-x)$ $(m+n)x=nx_1+mx_2$

よって，

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n} \quad \cdots\cdots ①$$

$$y=\frac{ny_1+my_2}{m+n} \quad \cdots\cdots ②$$

ＡＢが x 軸に垂直であるときは，$x=x_1=x_2$ であるから，この場合も①が成り立つ。同様にして，上記右の②も成立する。

２点Ａ (x_1, y_1)，Ｂ (x_2, y_2)に対して，線分ＡＢを $m:n$ の比に外分する点Ｐの座標は，次の式で与えられる。

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right) \quad (ただし，m \neq n)$$

この外分点Ｐ(x, y)の座標を表す式は，①，②において，n の代わりに $-n$ とおいた形である。

そこで，m，n が負の数の場合も考えて，点Ｐ(x, y)が線分ＡＢを $m:n$ の比に分けるということは，

$m>0$，$n>0$ の場合は， m ： n の比に内分する。

m，n が異符号の場合は， $|m|:|n|$ の比に外分する。

ということを意味すると考えると，内分，外分によらず次に示す一つの式にまとめる（統合)することができる。

このように考えると，一見異なる事実でも，同じ形式でまとめて考えられるよさがある。

２点Ａ (x_1, y_1)，Ｂ (x_2, y_2)に対して，線分ＡＢを m ： n の比に分ける点Ｐ(x, y)は次の式で与えられる。

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right) \qquad （ただし，m+n\neq 0）$$

② 指導上の配慮事項

内分点，外分点の定義や求め方を学習すると，$m:n$ の比に内分する場合の式と $m:n$ の比に外分する場合の式が求められることが分かる。

この後,「二つの式に共通して言えることはないか」と発問し,考え方の相違点について考察する。AからBの方向を「正」とすると，外分の $m>0$，$n<0$ として，内分する場合の公式に代入して計算してもよい。

また，$m<0$，$n>0$ としても結果は同じになる。このように，‘向き’を考えることで，内分，外分を表す式が一つの式で表されることに生徒は気付いていくであろう。

小学校，中学校，高等学校の事例四つを示したが，‘向き’という視点で考察していくことで，統合的に事象をとらえる力が高まっていくことが分かる。

３「統合的な考え」のもつ数学教育的意義

１）物事の本質的な性質や条件が明らかになる

統合するのは外見的には異なって見えるいくつかの事象について，より高い視点から共通する性質を見いだしていこうとするものである。統合的に考えていくことによって，異なった事柄に内在する共通の本質的性質を明らかにすることができる。この共通性を認識できれば，さらに次元を高め，それ以外の性質についても深く考察することができるようになる。

２）思考の活性化や身体的･精神的労力の節減ができる

統合することによって，その核となる概念が明らかになれば，他の課題についてもこれによって解決の見通しがもてるようになり，思考や労力が節約され，よりよいもの，より一般的なものをさらに追究していくことができることになる。例えば，いろいろな文章題を，無関係に一つ一つ解決して終わりにするというだけでなく，これらをまとめてみることによって個々の問題の理解も深まり，これらのどれをもとにしても他の問題の仕組みを説明できるようになり，思考を一層活性化させることができる。

また，関係がないと思われていた事柄が見方によって統一できるというところに，数学的な美しさや面白さを感じることができるようになり，数学のよさを別なところに見いだすことができるようになる。例えば，拡張によって前に学習した事柄を特殊なものとして位置付けることができれば，条件を変えていちいち個々別々に考える手間を省いたり，例外をなくし整然とした全体を把握することもできるようになったりして，思考の整理をすることができるようになる。

３）新しいものの発見に役立ち，発見の方法を身に付けられる

統合は，ただいくつかのことをまとめて一つのものにするというだけでなく，新しいものを積極的に既知の概念に取り込む活動でもある。これによってもとのものの内容理解が豊かに，そして，一層の理解の深まりが期待できる。同時に，一般を求める活動 *generalizing* が進み，新たな発見を誘発したり，知らず知らず発見の方法を身に付けていくことができるようになったりする。言うまでもなく，統合することによって，抽象の度合いは高まり，さらに発展的に考えることが可能となり，多面的な見方も身に付けることができる。

４）関係付けてものごとを考えようとする方策を，他でも適用しようとする力が身に付けられる

本稿でも幾つかの具体例で述べてきたように，‘向き’を導入し統合することによって，多くのことを一挙に関係付け理解を深めることができた。このように，その全体を鳥瞰できるような体験は，この方策（あるいは，手法）を他でも適用してみようという意欲を一層掻き立てるものとなろう。また，数学学習では豊かな発想をもつことが重要であるということを認識できるようにもなる。

このことは新たな視点を積極的に導入し，関係付けて考えようとするきっかけを自らに提供することになるし，他方，試行した結果について再び自らに問いかけ検証を促す活動を惹起することに繋がることになるものと考える。この事象の観察，結果の推察，試行，そして，結果の検証という一連の活動は，数学学習の理解には極めて大切である。

まとめ

子どもの理解を高め，子ども自身が数学を練り上げ，粘り強く学び続けていけるように，課題の本質的な意味に迫る手立てとして，‘向き’によって統合を図る考えについて考察してきた。算数・数学学習において‘向き’という *idea* を導入することによって統合を図る考えを意識的に授業で展開する工夫を考察してきて分かったことをまとめると以下のようになる。

i）‘向き’によって統合を図る考えは，別個のものととらえていたものの事象の関連を図って関係を見いだすことや，事象の関係を考察する数学的活動を実現する。

ii）‘向き’の考えを導入することで煩雑な思考を整理，節約し，学習内容の理解の深化が図れる。

iii）‘向き’によって統合を図る考えは，学習内容の系統性を明確にし，さらに高い位置から事象を考察することができる。

iv）‘向き’の考えを使って統合していく数学的活動は，子どもが自ら練り上げて数学をつくっていこうとする態度を育むことができる。

v）‘向き’の考えを使って統合していく数学的活動は，自ら考え，学び続けていこうとする子どもの意欲を高めることができる。

一見異なって見えるものが，‘向き’という考えで関連付けられ，整理される。つまり，まとめる

ことで分かり易くなるのである。すでに理解していたつもりの課題が，統合的に考えることで，一つにまとめられる新たな発見の感動を得ることができる。これを，算数・数学教育に関わる者として，より多くの子どもに算数・数学の学習を通して経験できる感動を伝えていきたい。

とはいえ，統合的に考えることで，子どもたちが混乱したり必要以上に複雑になったり，あるいは難解になったりしてしまうようでは，本末転倒である。今後，統合的に考えることで思考が節約できる事例を他にも掘り起こし，実践例を蓄積していくことが課題になろう。

「統合的な考え方」が，思考のすべてと言うのではない。それは，数学的思考のほんの一部分である。教師が統合的に教材を見る努力を惜しむことなく，一方でまた，子どもに統合的な考えを促す指導との棲み分けをしながら，共通する考えであることや本質的に同じであることを見抜く眼を養い，子どもが自ら発展的・統合的なもの見方・考え方をしようとする態度を育てる指導の実践研究を積み重ねていくことこそ大切であると考えているところである。

i

引用文献

1）G.ポリア　柿内賢信訳『いかにして問題をとくか』　（丸善株式会社,1954.6.）,p.109.
2）文部省 『小学校指導書　算数編』　（大阪書籍，1969.）,p.6.
3）岡本光司　『CREAR 数学的な考えを伸ばしていく子ども』　第５巻　(ニチブン,1995.), p.223.
4）中島健三　『算数・数学教育と数学的な考え方－その進展のための考察』　(金子書房, 1981.10.) pp.36-41. pp.47-50. pp.127-131.

参考文献

・和田義信　『著作講演集（2)考えることの教育』　東洋館出版社　1997.12.
・根本 博　『数学教育の挑戦～数学的な洞察と目標準拠評価～』　東洋館出版社　2004.10.
・「新しい算数研究３月号 No.434」　東洋館出版社　2007.3.
・『たのしい算数　研究編・資料編』　大日本図書　2005.7.
・片桐重男　他　編著　『数学的な考え方とその指導（小学校編）』　近代新書出版社　1971.7