茨城大学教育実践研究 31(2012), 17-31

変数操作シミュレーションによる教授方略の枠組み

小 口 祐 一*

(2012 年 9 月 15 日受理)

The Variable-Operational Simulation Teaching Strategy

Yuichi OGUCHI

キーワード：教授方略，変数操作，シミュレーション

本研究の目的は，「変数操作シミュレーションによる教授方略の枠組みを構築すること。」であった。変数操作とは，ルール命題に含まれる変数の変動方向を逆転させたり，変動幅を変化させたりする操作のことである。また，シミュレーションとは，現実の装置を用いた実験が困難な場合に，その実験をモデルによって模擬的に行うことである。本稿では，まず，先行研究をレビューし，統計判断における学習者の誤りを修正するために，変数操作が用いられていることを明らかにした。次に，変数操作の意義について，ルール命題の操作水準が低いために適切判断ができない学習者に対して，変数操作を通してルール命題の変換操作を促進する必要性を述べた。シミュレーションで用いられるモデルについて，大きく物理モデルと数学モデルに大別されること，さらに数学的モデルは「確定的・確率的」，「動的・静的」の観点で区別することができ，統計判断で用いるモデルは，確率的な数学モデルであることを述べた。以上の知見を検討して，変数操作シミュレーションの枠組みを構築し，その枠組みに基づいた変数操作シミュレーションの事例と評価問題を提案した。

問題と目的

平成 20 年 3 月に告示された中学校学習指導要領において，数学に新領域「資料の活用」が設置された。この領域の第 3 学年の内容には，「簡単な場合について標本調査を行い，母集団の傾向をとらえ説明すること。」が取り上げられている。この内容について，生徒は母集団から標本を抽出し，標本の傾向から母集団の傾向を推定することを学習する。そして，生徒は標本には散らばりがあり，推定した結果に基づいた予測や判断には誤りが生じる可能性があることを経験的に理解できるようになることが期待されている（文部科学省，2008）。標本比率から母集団の傾向を推定するときは，無作為抽出ならば，「標本の大きさが大きくなるに従って，標本比率は母比率に近づく。」という大数の法則を正しく適用する必要がある。

*茨城大学教育学部

たとえば，プロ野球の打率上位 10 名の成績は，4 月時点では打率 4 割を超える選手が多いのに，6 月頃になると打率は全体的に下がってくる。その根拠として，大数の法則を正しく適用し，「開幕から 4 月時点まででは選手の打数が少ないため，打率の散らばりは大きいから。」といった説明をすることができる（Nisbett *et al.*，1993）。このような標本比率の散らばりに関する問題に対して，大数の法則を適用した判断は困難であることが，先行研究により示されている。

ある町に 2 つの病院がある。大きい病院では毎日約 45 人の赤ちゃんが生まれ，小さい病院では毎日約 15 人の赤ちゃんが生まれる。ご存知のように，赤ちゃんの約 50%は男の子である。しかし，男の子の正確な割合は日によって異なる。あるときは 50%以上かもしれないし，あるときは 50%以下かもしれない。

1 年間を通して，それぞれの病院は生まれた赤ちゃんの 60%以上が男の子であった日を記録した。あなたは，どちらの病院の方が，そのような日が多く記録されたと考えるか。

ア．大きい病院。

イ．小さい病院。

ウ．どちらもほぼ同じ。

FIGURE 1　産科病院問題

TABLE 1　産科病院問題に対する反応者数の分布

問題提示	60%以上
大きい病院。	12（24%）
小さい病院。	10（20%）
どちらもほぼ同じ。	28（56%）

Kahneman and Tversky（1972）は，産科病院問題（FIGURE 1）を利用して，学習者が大数の法則を適用して適切判断ができるかどうかを調査した。この産科病院問題に対して，1 年間を通して，男の子が生まれる割合が 60%以上の日は小さい病院の方が多いという正答率は 20%であり，どちらの病院も同じであるという反応率が 56%で最も高かったのである（TABLE 1）。このように，学習者には，標本の大きさを考慮せずに，大数の法則を適用しない傾向（以降，「標本の大きさの無視」という。）があることを指摘した。この見解に対して，問題の形式を変更することにより，学習者は，標本の大きさを考慮するようになり，大数の法則を適用した適切判断は促進されることを示した研究がある。

Evans and Dusoir（1977）は，産科病院問題（FIGURE 1）について，生まれた赤ちゃんが男の子である人数を記録する日数と，生まれた赤ちゃんが男の子である割合という 2 つの変数を操作し，4 つの群を設定して調査した。第 1 群は，ある日に，生まれた赤ちゃんのすべてが男の子である可能

性が高い病院の方を選択する群，第2群は，ある日に，生まれた赤ちゃんの60%以上が男の子である可能性が高い病院の方を選択する群，第3群は，1年間を通して，生まれた赤ちゃんのすべてが男の子である日が多い病院の方を選択する群，第4群（統制群）は，1年間を通して，生まれた赤ちゃんの 60%以上が男の子である日が多い病院の方を選択する群である。ただし，「どちらもほぼ同じ。」という選択肢は除外され，どちらかの病院を強制的に選択させる問題形式に変更されていた。その結果，「ある日に」という問題提示をした第1群と第2群を合わせたときの正答率（85%）と，「1年間を通して」という問題提示をした第3群と第4群を合わせたときの正答率（62.5%）には有意差がみられた（$p<.05$，χ^2検定）（TABLE 2）。

TABLE 2 試行回数の変数操作

問題提示	100%	60%以上
ある日に	17（85%）	17（85%）
1年間を通して	14（70%）	11（55%）

（数字は反応数。対象者数は各群20名であった。）

Bar-Hillel（1982）は，産科病院問題（FIGURE 1）について，生まれた赤ちゃんが男の子である割合という変数を操作し，4つの群を設定して調査した。1年間を通して，生まれた赤ちゃんが男の子である割合について，60%以上とした第1群（統制群），70%以上とした第2群，80%以上とした第3群，100%とした第4群である。ただし，男の子である割合が100%とした第4群では，大きい病院で1日15人，小さい病院で1日5人の赤ちゃんが生まれるという問題提示に変更されていた。各群の正答率は，それぞれ順に20%，43%，42%，54%であった（TABLE 3）。60%以上が男の子である日が多い病院の方を求めるという第1群（統制群）の結果は，Kahneman and Tversky（1972）の結果と一致した。第1群（統制群）の結果と他の群の結果を比較すると，60%以上という元の形式で提示するよりも，標本比率の範囲を 100%に変更して問題提示をした方が，正答率は有意に高かった（$\chi^2=9.8362$，$p<.01$）。また，70%以上に変更して問題提示をしたときの正答率も有意に高く（$\chi^2=4.1448$，$p<.05$），80%以上に変更して問題提示をしたときの正答率の高さには有意傾向があった（$\chi^2=3.4.131$，$p<.10$）。

TABLE 3 標本比率の変数操作

問題提示	60%以上	70%以上	80%以上	100%
大きい病院。	8（20%）	7（25%）	7（26%）	8（19%）
小さい病院。	8（20%）	12（43%）	11（42%）	22（54%）
どちらもほぼ同じ。	24（60%）	9（32%）	9（32%）	11（27%）

（数字は反応数。）

以上から,標本比率の散らばりに関して,学習者の判断には次のような傾向があると推測される。まず,標本比率が60%以上になる可能性を問う問題を提示するよりも,70%以上かそれより大きい割合以上になる可能性を問う問題を提示する方が,大数の法則を適用して適切判断する学習者が多いと考えられる。また,標本抽出の回数(あるいは実験の試行回数)を多くするよりも,1 回だけの方が,大数の法則を適用して適切判断する学習者が多いと考えられる。このことから,適切な変数操作は,大数の法則を適用した適切判断の促進に効果があると期待される。

変数操作の意義

適切な変数操作は,大数の法則を適用した適切判断の促進に効果があると期待された。ここでは,知識表象の操作水準にかかわる先行研究を省察し,変数操作の意義について検討をすすめる。

TABLE 4 ルール命題に対する操作的思考(工藤, 2010)

操作的思考	操作の分類	内　容
変数操作的思考	裏操作	変数値ないし値の変動方向の逆転
	変動値操作	変動方向を維持した変数値の変動幅の変化
		変動方向を仮定した命題化
	固定値操作	変数値の固定
		変数値の固定による命題化
	特異値操作	変数値の極端な変動
関係操作的思考	逆操作	関係項の方向の逆転
	手続き化操作	目的―手段関係の表現
	手がかり化操作	判断の証拠や手がかりの表現
	因果操作	因果関係の表現
抽象度操作的思考	代入操作	変数項への具体例の代入
	上位ルール化操作	複数のルールの組み合わせによる上位ルールの生成

工藤(2005)は,学習者の「平行四辺形の求積公式」に関する知識表象の操作水準を測定した上で,等周長問題(正方形の底辺を固定して,4 辺の長さを等しく保ったまま高さを変えて平行四辺形に変形したとき,変形前後における面積変化の大小判断を求める問題)を解決するように求めた。等周長問題を解決するためには,「平行四辺形の面積は底辺と高さをかけ合わせたものに等しい」という知識表象を,「底辺が固定されている場合,面積は高さのみで決まる」,「底辺が固定されている場合,高さが縮めば面積は小さくなる」というように,問題解決に適用できる形に知識表象を操作する必要がある(工藤,2003)。この研究では,操作水準を測定する問題として,「平行四辺形の求積公式」を意味している 8 項目が提示され,対象者には,それら 8 項目のうち平行四辺形の求積公

式を意味していると考えた項目に○を付けることが求められた。○を付けた数が多いほど，求積公式の操作水準が高いと定義された。○を付けた数が 8 項目であった対象者を高操作群とし，○を付けた数が 5 項目以下の対象者を低操作群とした。そして，等周長問題に対して，「平行四辺形の求積公式が利用できる」というヒントを与えなかった条件で回答させた後，ヒントを与えた条件で回答させた。その結果，高操作群は，低操作群と比較してヒントなしの条件で正答者が多かったが，低操作群はヒントありの条件でも正答者がほとんど増えなかった。この研究は，知識を問題解決に適用できるかどうかには，学習者の操作水準が影響を与えていることを示唆している。

工藤（2010）は，さらにカテゴリールールの操作的思考を量的ルールにも拡張し，変数操作的思考，関係操作的思考，抽象度操作的思考という 3 つの操作的思考に分類している（TABLE 4）。標本比率の散らばりを比較する問題に関していえば，「標本の大きさが大きくなるに従って，標本比率は母比率に近づく。」という大数の法則のルール命題には，「標本の大きさ」と「標本比率」という変数項が含まれる。このルール命題を標本比率の散らばりに関する判断の手がかりを表す命題に変換すると，「標本の大きさが大きいほど，標本比率の散らばりは小さい。」という命題（手がかり化命題）が導かれる。このような操作は，手がかり化操作と呼ばれる。そして，変数値の変動方向を逆転させると，「標本の大きさが小さいほど，標本比率の散らばりは大きい。」という命題（裏命題）が導かれる。このような操作は，裏操作と呼ばれる。産科病院問題など，標本比率の散らばりを比較する問題に対しては，上述した裏命題を適用することによって適切判断がなされると考えられる（TABLE 5）。

TABLE 5　大数の法則の変換操作

原命題 （手がかり化命題）	標本の大きさが大きくなるに従って，標本比率は母比率に近づく。 標本の大きさが大きいほど，標本比率の散らばりは小さい。
逆命題	標本比率の散らばりが小さいほど，標本の大きさは大きい。
裏命題	標本の大きさが小さいほど，標本比率の散らばりは大きい。
対偶命題	標本比率の散らばりが大きいほど，標本の大きさは小さい。

大数の法則の変換操作を促進させるためには，どのような教授方略を構築すればよいだろうか。まず，手がかり化命題を導くためには，「標本比率」という変数について，測定値の集中度から測定値の散布度へ，対象とする変数を操作させる必要がある。産科病院問題（FUGURE 1）に関していえば，男の子の割合が母比率の近くに集まる確率から母比率から離れた区間になる確率へ，対象とする変数を操作させる必要がある。次に，手がかり化命題から裏命題を導くためには，「標本の大きさ」という変数について，変数値を変化させる必要がある。産科病院問題（FUGURE 1）に関していえば，病院で生まれる赤ちゃんの数が多い 45 人から少ない 15 人へ，すなわち，標本の大きさが大きい方から小さい方へ，変数値を変化させる必要がある。さらに，母比率から離れた区間について，100％から 60％まで，および 0％から 40％まで，変数値の変動幅を操作させることが重要になる。そうすることで，裏命題の一般性が保証されるからである。

以上から，ルール命題に含まれる変数の操作は，大数の法則の変換操作と強い関連があるといえる。言い換えれば，ルール命題に含まれる変数を操作させ，その操作と大数の法則の変換操作を関連付けることは，学習者の誤判断を修正させる教授方略の構築において，重要な条件になると考えられる。

シミュレーションの機能

ルール命題の変数操作をさせ，その操作と大数の法則の変換操作を関連付けることは，学習者の誤判断を修正させるための教授方略の構築において，重要な条件になると考えられた。ここでは，そのような関連付けに効果があると予想されるシミュレーションについて検討をすすめる。シミュレーション（Simulation）は，ラテン語の Simulo（まねる）を語源として生まれた言葉である。本研究で，シミュレーションとは，「現実の装置を用いた実験が困難な場合に，その実験をモデルによって模擬的に行うこと。」（岡本ほか，2002）という定義に基づいて議論をすすめる。シミュレーションは一般に模擬実験と和訳され，その意義は，「現実の現象を模擬することによって，その現象の解析や予測を行う実験的・補助的な手法であり，時間，費用，危険などを軽減する目的で行われること。」といわれている（伊藤・草薙，2006）。

シミュレーションで用いられるモデルは，次の 2 つに大別される。

第 1 の類型は，「物理モデル」である。たとえば， フライトシミュレーション（飛行機操縦訓練装置）は，現実の飛行機を用いた訓練は困難であり，このような訓練による時間，費用，危険などを回避して，緊急事態における操縦方法などをシミュレーションできる物理モデルである。

第 2 の類型は，「数学モデル」である。たとえば，天気予報は，気象の変化を模擬したモデルに観測データを入力することによって，その後の天気を予測する気象シミュレーションに基づく結果である。このような数学モデルは，現実の現象に関する何かしらの問題背景があって，その現象を数学モデルに置き換え，変数値を操作して計算することができる。

数学モデルの特性に着目すると，「確定的・確率的」，「動的・静的」の観点で数学的モデルを区分することができる。確定的モデルとは，数式を用いて計算で 1 つの解答を得ることができるモデルであり，確率的モデルとは，ランダムな現象など，実験で確率を推定できるモデルである。また，動的モデルとは，時間経過に伴って状態が変化するモデルであり，静的モデルとは，時間という変数が含まれないモデルである。

確定的で動的な特性を持つ数学的モデルの例として，運動方程式が挙げられる。たとえば，「ウサギを追うキツネ」（FIGURE 2）は，運動方程式を用いて，現実のウサギとキツネの運動をモデル化し，グラフ表現などを用いてシミュレーションすることができる（文部科学省，2002）。

また，確率的で動的な特性を持つ数学的モデルの例として，確率過程が挙げられる。たとえば，「クラス会の釣銭」（FIGURE 3）は，コイン投げなどを用いて，釣銭として用意する 500 円硬貨の枚数をシミュレーションすることができる（文部科学省，2002）。

キツネは，50m 離れたところをウサギが一直線に走っていくのを見つけた。キツネは，ウサギを追いかけて走り出した。どんなことになるだろうか。時刻 0 に，ウサギは原点 (0, 0)，キツネは (0, 50) にいることにする。ウサギは，X 軸上を正の方向に u＝6（m／秒）で走る。キツネは，ウサギの方向に向かって v＝10（m／秒）で追いかける。この運動の数式によるモデルを作って，シミュレーションを実行してみよう。

FIGURE 2 ウサギを追うキツネ

解答

時刻 t におけるウサギの位置を（x_i，y_i）とすると，

$$x_{i+h} = x_i + uh,\quad y_{i+h} = y_i$$

時刻 t におけるキツネの位置を（X_i，Y_i）とすると，

$$X_{i+h} = X_i + \frac{x_i - X_i}{\sqrt{(x_i - X_i)^2 + (y_i - Y_i)^2}} vh,\quad Y_{i+h} = Y_i + \frac{y_i - Y_i}{\sqrt{(x_i - X_i)^2 + (y_i - Y_i)^2}} vh$$

t＝0 のとき，ウサギの位置は（0，0），キツネの位置は（0，50）であることから，上述した数式による確定的モデルを用いて，時刻 t＋h のときの位置を計算で求めることができる。

クラス会の会費は 1500 円である。出席者は 25 人であったが，クラス会の幹事は，おそらく千円札を 2 枚出しておつりを 500 円もらう人が半数程度いると考えた。クラス会の幹事は，釣銭の 500 円硬貨を何枚用意しておくとよいだろうか。

FIGURE 3 クラス会の釣銭

解答

コイン投げを 25 回行う。コインのオモテが出たら 1500 円ちょうどで支払う人（結果として 500 円硬貨が 1 枚増えるケース），コインのウラが出たら 2000 円で支払って 500 円のおつりをもらう人（結果として 500 円硬貨が 1 枚減るケース）と置き換えれば，釣銭が不足するかどうかを実験して，用意しておく 500 円硬貨の枚数を推定することができる。

上述した 2 問はどちらも動的モデルであるが，「ウサギを追うキツネ」のように，時間経過に伴って状態が連続的に変化するモデルは，連続変化モデル（Continuous-Change Model）と呼ばれる。一

方,「クラス会の釣銭」のように，ある時間帯では状態の変化はなく，ある時間に状態が離散的に変化するモデルは，離散変化モデル（Discrete-Change Model）と呼ばれる。

確定的で静的な特性を持つ数学的モデルの例として，在庫管理が挙げられる。たとえば,「最適在庫問題」（FIGURE 4）は，一次関数を用いて，1 日あたりの製造個数に基づく支出，収入，利益をシミュレーションすることができる（文部科学省，2002)。

また，確率的で静的な特性を持つ数学的モデルの例として，モンテカルロ法が挙げられる。たとえば,「円周率実験」（FIGURE 6）は，正方形の内部に豆をまいたとき，総個数に対する 4 分円の内部に入った豆の数の割合を用いて, 円周率をシミュレーションすることができる（文部科学省, 2002)。

A さんはケーキ店のオーナーである。ケーキは生菓子なので，1 日経つと売ることができない。毎日どれだけ作っておいたら，最も利益が大きくなるかを調べたい。過去 60 日の需要を調べると，10 個から 24 個までの範囲に分布していた。1 日あたりの平均需要は 16.4 個であった。ケーキの原価は 160 円／個であり，販売単価は 350 円／個である。

FIGURE 4　最適在庫問題

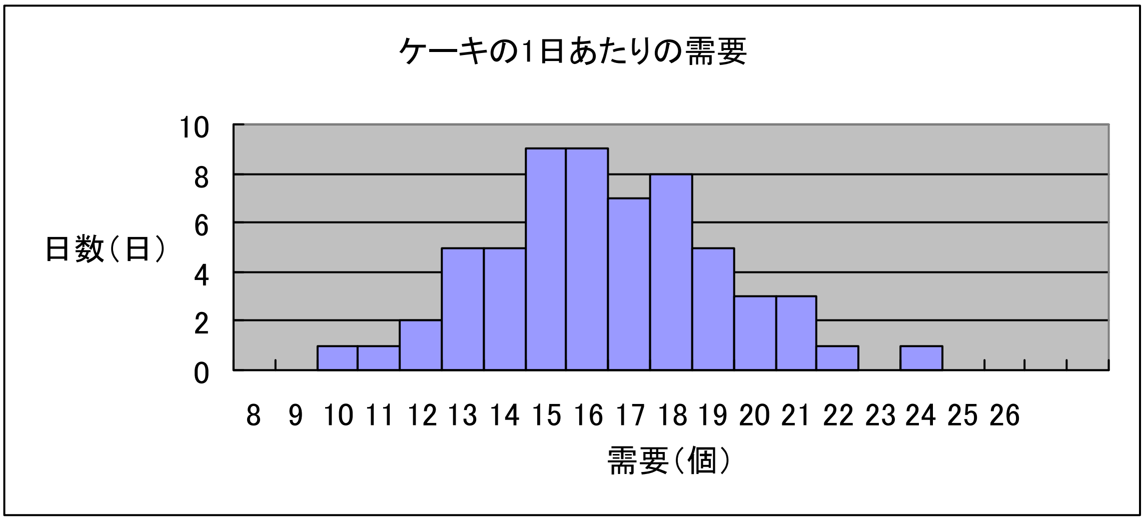


FIGURE 5　需要の分布

解答

支出の計算は，次のことばの式によるモデルで表される。

全製造個数＝1 日あたりの製造個数×営業日数

総支出＝1 個あたりの原価×全製造個数

収入の計算は，次のことばの式によるモデルで表される。

総収入＝販売単価×販売個数

利益の計算は，次のことばの式によるモデルで表される。

総利益＝総収入—総支出

1 日あたりの製造個数を変化させて，そのときの総利益をシミュレーションすることができる。

１辺の長さが１である正方形の内部に，半径１の４分円がある。半径１の円の面積はπであるから，面積がわかればπの値を計算することができる。この正方形の内部に小さな豆 N 個をランダムにまく。いくつの豆が４分円の内部に入るだろうか。

FIGURE 6　円周率実験

解答

豆が４分円の内部に入る確率 p は，正方形の面積 1 に対する４分円の面積 S の割合で表されるから，p＝S／1＝S　である。実験の結果，４分円の内部に入った豆の数が M 個であったとき，

p の推定値＝M／N

コンピュータを使って豆まきのシミュレーションを行えば，「N が大きくなるに従って，p の推定値の精度は高くなる。」という大数の法則の手がかり化命題を，体験を通して学習することができる。

以上のように，シミュレーションは，現実の装置を用いた実験が困難な場合に，その実験をモデルによって模擬的に行うことにより，結果の見通しを立てたり，よりよい対策は何かと判断したりできるようにする機能を持っている。本研究は，統計的な現象に対する学習者の判断を対象にしている。そのため，本研究では，確率的な特性を持つ数学モデルを利用する。

変数操作シミュレーションによる教授方略の枠組み

ここでは，変数操作シミュレーションによる教授方略の枠組みについて検討をすすめる。この教授方略を構築する目的は，学習者に，大数の法則の変換操作を促進させ，結果として統計判断における学習者の誤りを修正させることである。まず，先行研究を振り返り，操作する変数と変数値の変動幅などの扱いについて検討する。

岡田（2011）は，コイン投げ問題（FIGURE7）を利用して，オモテが出る割合という変数を操作し，変数値の変動幅を変化させた 4 つの群を設定して調査した。C 群（統制群）は，標本の大きさの比が 18 : 42 でオモテが出る割合が 60%以上，E60 群は，標本の大きさの比が 5 : 100 で，オモテが出る割合が 60%以上，E80 群は，標本の大きさの比が 5 : 100 で，オモテが出る割合が 80%以上，E100 群は，標本の大きさの比が 5 : 100 で，オモテが出る割合が 100%という状況で，人数が少ないグループの方を選択することが求められた。C 群（統制群）と E60 群の正答率はどちらも 29%，E80 群の正答率は 31%，E100 群の正答率は 55%であり，E100 群の正答率が有意に高かった。この

結果は，標本の大きさの比が 15：45 で，オモテが出る割合という変数を操作した Bar-Hillel（1982）の結果とほぼ一致した。また，コイン投げ問題に回答させた後に，産科病院問題を提示したところ，この問題の正答率は，4 つの群でそれぞれ順に 43%，29%，29%，18%であった。

C 群（統制群）

A 組には 18 人，B 組には 42 人の人がいます．全員に 1 回ずつコインを投げてもらいます．表が出た人がクラス全体の 60%以上になる確率が多いのはどちらの組でしょうか．

① A 組，　② B 組，　③ どちらも同じ

E60 群（実験 60 群）

A 組には 5 人，B 組には 100 人の人がいます．全員に 1 回ずつコインを投げてもらいます．表が出た人がクラス全体の 60%以上になる確率が多いのはどちらの組でしょうか．

① A 組，　② B 組，　③ どちらも同じ

E80 群（実験 80 群）

A 組には 5 人，B 組には 100 人の人がいます．全員に 1 回ずつコインを投げてもらいます．表が出た人がクラス全体の 80%以上になる確率が多いのはどちらの組でしょうか．

① A 組，　② B 組，　③ どちらも同じ

E100 群（実験 100 群）

A 組には 5 人，B 組には 100 人の人がいます．全員に 1 回ずつコインを投げてもらいます．表が出た人がクラス全体の 100%になる確率が多いのはどちらの組でしょうか．

① A 組，　② B 組，　③ どちらも同じ

FIGURE 7 コイン投げ問題

TABLE 6 コイン投げ問題の正答者数

	コイン投げ問題	産科病院問題
C 群	15（29%）	22（43%）
E60 群	15（29%）	15（29%）
E80 群	16（31%）	15（29%）
E100 群	28（54%）	9（18%）

（対象者数は，各群 52 名であった。）

この結果から，「標本比率」を 100%という変数値にした状況で，多くの学習者は，大数の法則を適用して適切判断すると考えられる。一方，この状況で適切判断できるにもかかわらず，「標本比率」を 60%以上という変動幅にした状況に，このような判断は転移しないといえる。

そこで，シミュレーションによる教授方略の枠組みにおいて，「標本比率」を 100%から 60%まで，

および0%から40%まで連続的に変化させる状況を取り入れる必要があることが示唆された。そうすることによって，学習者が，「標本比率」が100%という変数値にした状況で適用した大数の法則（および変換操作された命題）を，60%以上という変動幅にした状況でも適用するようになることが期待される。

TABLE 7　変数操作と変換操作

変数	操作範囲	変換操作
標本比率	50%→100%，50%→0%	手がかり化命題
標本の大きさ	100→5，45→15	裏命題
標本抽出の回数（試行回数）	1→100	

変数操作シミュレーションの目的は，ルール命題の変換操作を促進し，学習者の誤判断を修正させることである。ここでは，ルール命題の変換操作を促進する変数操作シミュレーションによる教授方略の枠組みを検討する。事例として，産科病院問題で男の子が生まれる事象をコイン投げ問題でオモテが出る事象に対応させた変数操作シミュレーションを用いる。まず，標本の大きさに差がある2つのグループをつくる。そして，コイン投げシミュレーションを行わせて，標本の大きさの差に伴う標本比率の散らばりの違いについて，2つのグループの分布をグラフに表示させ，比較させる。標本の大きさの差に伴う標本比率の散らばりの違いについて，グラフ表現で視覚的にとらえやすくすることにより，大数の法則の「標本の大きさが大きいほど，標本比率の散らばりは小さい。」という手がかり化命題と，「標本の大きさが小さいほど，標本比率の散らばりは大きい。」という裏命題の妥当性を直観的に理解させる。具体的には，「標本の大きさ」という変数の変数値を操作して，オモテが出た割合（標本比率）を求める実験を行わせる。そして，シミュレーションの結果を用いて，「X%以上になる確率」という変数Xに60，70，80の値を代入操作して，標本比率の散らばりに関する分析を行わせることにする。最後に，数式による計算を利用して，大数の法則の妥当性を論理的に理解させる。

仮説

コイン投げシミュレーションによって，学習者は，標本の大きさの差に伴う標本比率の散らばりの違いを視覚的にとらえ，大数の法則の手がかり化命題と裏命題の妥当性を直観的に理解できる。その結果，標本比率の散らばりに関する問題に対して，適切判断するようになるだろう。

変数操作シミュレーションによる教授方略の事例

標本の大きさに差があると，ある事象の起こる割合が散らばる様子は違ってくることを教授する。すなわち，「標本の大きさが小さいほど，標本比率の散らばりは大きい.」というルールを教授する。

ここで取り上げる事例は，大きさに差がある 2 つの標本について，標本比率の散らばりを比較するコイン投げシミュレーションである。変数操作シミュレーションによる教授方略を具体化するため，次に述べる教授プラン，学習プリントと評価問題を作成した。

教授プラン

方針①:「大きさに差がある 2 つの標本について，標本比率の散らばりを比較するシミュレーションを行わせ，大数の法則の妥当性を直観的に理解させる。」

T: この授業を受講している人は, 全部で 50 人です。50 人を 2 つのグループに分けたいと思います。こちらの 10 人が A グループ, それ以外の人が B グループにします。全員がコインを 1 回投げて，オモテが出る割合を求める実験をします。たとえば，A グループで 6 人にオモテが出れば，その割合は 60%（0.6）になります。オモテが出る割合が 60%以上になる可能性は，どちらのグループの方が高いでしょうか。この実験を 1 回やってみましょう（学習プリント①を配布)。

C :（A グループ）0.6。

C :（B グループ）0.55。

T : どんな結果でしたか。

C : A グループの方は，オモテが出た割合が 60%になりました。

C : 実験を 1 回行っただけだから偶然だと思う。

T : それでは，この実験を 20 回ずつ実施して，オモテが出る割合が 60%以上，70%以上，80%以上になる回数を比較してみましょう（結果の集計表とグラフ用紙を配布)。

方針②:「標本比率の期待値と分散の公式を利用して，大数の法則の妥当性を計算で確かめさせる。」

T: コイン投げでオモテが出る事象の母比率を p，散らばりを表わす指標である母分散を σ^2 とします。このとき，コイン投げでオモテが出る事象の標本比率の期待値と分散は，次のような計算で求めることができます（学習プリント②配布)。

学習プリント①:コイン投げシミュレーション

この授業を受講している人は, 全部で 50 人です。50 人を 2 つのグループに分けたいと思います。A グループが 10 人，それ以外の人が B グループにします。全員がコインを 1 回ずつ投げて，オモテが出る割合を求める実験をします。たとえば，A グループで 6 人にオモテが出れば，その割合は 60%（0.60）になります。オモテが出る割合が 60%以上になる可能性は，どちらのグループの方が高いでしょうか。

(1) この実験を 1 回やってみましょう。

どんな結果でしたか。

A グループ（　　　　）%，B グループ（　　　　）%

この結果から，気づいたことや疑問に思ったことなどを書きなさい。

(2)　この実験を 20 回ずつ行って，オモテが出る割合が 60%以上，70%以上，80%以上になる回数を比較してみましょう。
オモテが出た割合の分布をヒストグラムに表しなさい。

2 つのグループの結果を比較して，気づいたことや疑問に思ったことなどを書きなさい。

	標本の大きさ	標本抽出の回数
A グループ	10	20
B グループ	40	20

学習プリント②：標本比率の性質

「標本の大きさが大きいほど，標本比率の散らばりは（　　　　）。」
「標本の大きさが小さいほど，標本比率の散らばりは（　　　　）。」

事象 A の要素を 1，事象 A でない要素を 0 で表す変量を x とおく。事象 A の母比率が p，母分散が σ^2 である母集団から大きさ n の標本を無作為抽出し，この標本の要素 x の値を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。この標本における事象 A の要素の個数を $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とする。
事象 A の標本比率を R とすると，標本比率 R の期待値と分散は次のようになる。

$$E(R) = E\left(\frac{S}{n}\right) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\} = \frac{1}{n} \times np = p$$

$$V(R) = V\left(\frac{S}{n}\right) = V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\{V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_k)\} = \frac{1}{n^2} \times n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

したがって，標本比率の標準偏差は $\sigma(R) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

コイン投げの場合，オモテが出る事象の要素を 1，ウラが出る事象の要素を 0 で表すと，オモテが出る事象の母比率が 0.5，母分散が $\sigma = 0.5 \times (1 - 0.5) = 0.25$ である。

したがって，母標準偏差は $\sigma = \sqrt{0.25} = 0.5$

この母集団から大きさ n の標本を無作為抽出したとき，オモテが出る事象の標本比率を R とすると，標本比率 R の期待値と分散は次のようになる。

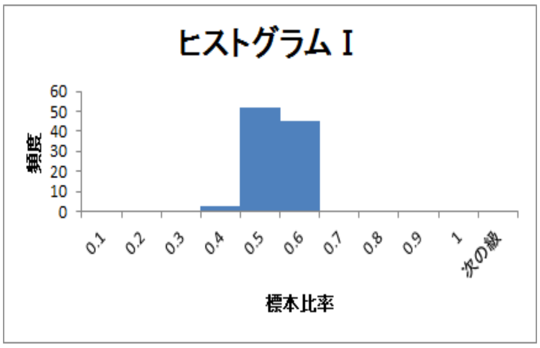
$$E(R)=E\left(\frac{S}{n}\right)=E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n}\{0.5+0.5+\cdots+0.5\}=\frac{1}{n}\times 0.5n=0.5$$

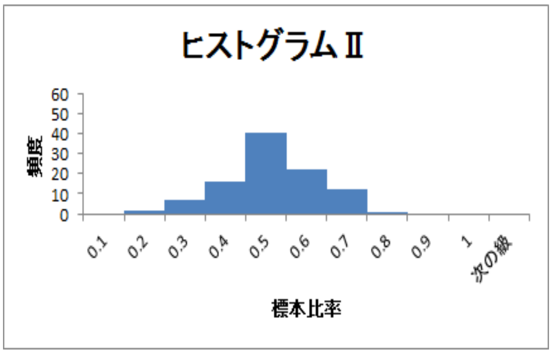
$$V(R)=V\left(\frac{S}{n}\right)=V\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\{0.25+0.25+\cdots+0.25\}=\frac{1}{n^2}\times 0.25n=\frac{0.25}{n}$$

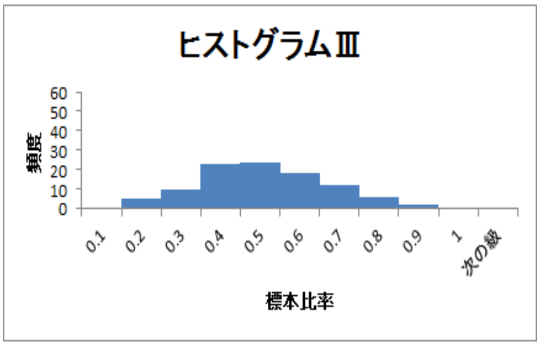
したがって，標本比率の標準偏差は$\sigma(R)=\dfrac{0.5}{\sqrt{n}}$

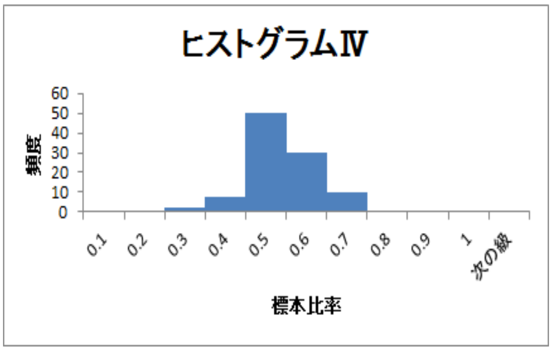
評価問題

ある高校の 170 人の生徒を 4 つの講座に分けました。A 講座に 10 人，B 講座に 20 人，C 講座に 40 人，D 講座に 100 人の生徒がいます。全員が 1 回ずつコインを投げて，オモテが出る割合を求める実験をします。たとえば，A 講座で 4 人にオモテが出れば，その割合は 0.4 になります。各講座でこの実験を 100 回ずつ行って，オモテが出た割合の分布をヒストグラムに表したところ，次の 4 つになりました。









(1) A 講座でオモテが出た割合の分布を表しているのは，どのヒストグラムですか。そう判断した理由も述べなさい。

(2) B 講座でオモテが出た割合の分布を表しているのは，どのヒストグラムですか。そう判断した理由も述べなさい。

(3) C 講座でオモテが出た割合の分布を表しているのは，どのヒストグラムですか。そう判断した理由も述べなさい。
(4) D 講座でオモテが出た割合の分布を表しているのは，どのヒストグラムですか。そう判断した理由も述べなさい。

謝辞

本研究は科研費【課題番号 22530990】の支援を受けている。

引用文献

Bar-Hillel, M. 1982. “Studies of representativeness,” In: Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, 69-83, Cambridge University Press.

Evans, J. St. B. T. and Dusoir, A. E. 1977. “Proportionality and sample size as factors in intuitive statistical judgment,” *Acta Psychologica*, **41**, 129-137.

伊藤俊秀・草薙信照. 2006. 『コンピュータシミュレーション』(オーム社).

Kahneman, D. and Tversky, A. 1972. “Subjective probability: A judgment of representativeness”, *Cognitive Psychology*, **3**, 430-454.

工藤与志文. 2003. 「等周長問題の解決における「不活性知識」としての求積公式 —大学生を対象とした事例研究—」『札幌学院大学人文学会紀要』 74, 27-40.

工藤与志文. 2005. 「概念的知識の適用可能性に及ぼす知識操作水準の影響 —平行四辺形求積公式の場合—」『教育心理学研究』 53, 405-413.

工藤与志文. 2010. 「ルール学習と操作的思考 —概観と展望—」『教授学習心理学研究』 6, 29-41.

文部科学省. 2002. 『新教科「情報」現職教員等講習会テキスト』(文部科学省).

文部科学省. 2008. 『中学校学習指導要領解説数学編』(教育出版).

Nisbett, R. E., Krantz, D. H., Jepson, D. & Kunda, Z. 1983. “The use of statistical heuristics in everyday reasoning”, *Psychological Review*, **90**, 339-363.

岡田いずみ. 2011. 「統計的確率の誤認識を修正する試み」『日本教授学習心理学会年会予稿集』 7, 40-41.

岡本敏雄・西野和典・香山瑞恵. 2002. 『情報科教育法』(丸善).