茨城大学教育実践研究 31(2012)，47-60

知識の高次化を促進する数学的モデリングに関する研究

木 村 了 士* ・ 小 口 祐 一**

(2012 年 9 月 15 日受理)

A Study of Mathematical Modeling to Facilitate Higher Education

Satoshi KIMURA and Yuichi OGUCHI

キーワード：知識の高次化，数学的モデリング，止揚

「知識基盤社会の到来，グローバル化の進展など急速に社会が変化する中，幅広い知識と柔軟な思考力に基づく判断や，他者と切磋琢磨しつつ異なる文化や歴史に立脚する人々との共存など，変化に対応する能力が求められている。」[1)]このような社会状況の中で，子ども達に最も求められる力は自己教育力であると考える。自ら課題を発見・考察し，発展させていくことで知識を高めていこうとする主体的な学習態度を養い，その学習方法を身に付けさせることが大切である。

そのため，数学的モデリングの学習過程をもとに学習プロセスを整理する。特に数学的モデルを生成する過程を重視した学習プロセスを工夫することで創造的な学習が期待できると考える。

既存のモデルを改善し，「対立－止揚」の場を設定した「らせん型モデル」を構築した。

はじめに

急激に変化する社会状況の中で，子ども達に最も求められる力は自己教育力であると考える。

しかし実際の生徒の様子は，自己を教育するという態度とはほど遠い状況にある。授業では問題が解ければそれで終わり，次にすべきことが分からずに指示を待つという受け身の姿勢が多く見られる。「自分自身の知識をよりよいものにしよう。」「習ったことを自分のものにして新しい数学を創り出そう。」「実生活の中で活用していこう。」などといった意識が希薄であるように感じられる。この状況をどう打破するべきなのだろうか。何が問題なのだろうかと考えたとき，下記の２点の問題点が浮かび上がった。

第一に，数学は答えを出したら終わりであるという固定観念があるということである。これまでの学習習慣の弊害と考えられる。「数学は定式化することで処理が容易になる。」まさにその通り

*水戸市立第四中学校　　**茨城大学教育学部

である。だがこの処理の面ばかりが強調され，ややもするとアルゴリズムの暗記に偏った授業展開が多くなりがちだったのではないだろうか。近年の調査問題（OECD の PISA 調査や文部科学省の全国学力・学習状況調査）において，計算や証明の結果を解釈したり，結果が新たな課題につながったりするような問題が多く出題されていることを考えても，答えを出してから始まる数学を大切にしたいと考える。

第二に，問題解決型の学習の方法が身に付いていないということである。生徒は問題や課題は教師から与えられるものであると考えており，問題場面から課題を発見し解決することで自分自身の知識を高めていくという学習をあまり経験していない。そのため，意欲はあってもどうすればよいのか分からない。どのように問題場面に向き合えばその問題の解決に近づけるのかというアプローチ方法を身に付けさせる指導が不足していたと考える。

そこで本研究では，学習過程の中で「対立－止揚」という場を意識的に取り上げること，数学的モデルを生成する過程を重視した学習プロセスを工夫することを通して，獲得した知識をよりよいものにしようと主体的に事象を考察する生徒の育成を図りたいと考える。これが自己教育力となり，急速な社会の変化に柔軟に対応できる人間を育てることにつながると考えるからである。

基本的な考え方

1　知識の高次化を図る

事象を考察していく過程で徐々に理解が深まっていく時もあるが，ある瞬間に性質の一般性・普遍性に気付き，思考レベルが一気に飛躍するという時もある。例えば，三平方の定理の拡張において３辺に相似な長方形をかいた場合を考察している過程で，「３辺上に正三角形をかいても同様の性質が成り立つのではないか。」「３辺上に相似な図形をかけば同様の性質が成り立つのではないか。」と気付く瞬間である。この瞬間が「知識が高次化」される瞬間であると捉える。

数学的知識に限らず，知識は一般的に弁証法的に「対立－止揚」の過程を経て高次化されていくのではないかと考える。１つの命題が真であるという結論に達したとき，その命題に矛盾するまたは包含されないような命題が現れることで対立が起こる。その対立を解消し，より一般的な命題を創り出そうという思考過程である。この際止揚を促すものが，対立する命題の出現と自分自身の活動を振り返るという行為である。「あることが分かった。」「これは何を意味するのか？」「ここから新しい命題が生まれないだろうか？」「新しい命題と先の命題との類似点，相違点は？一般化できないか？」「一般化できないとしたら命題の設定が違っていたのではないか？」というように，絶えず自分自身の活動を振り返り，自らの知識を高めていく態度と能力を育みたい。

「振り返り」について根本博[2)]は，「真に有用な数学的知識を獲得するためには，豊かな表象を保障する活動，それを意味づける経験がなければならない。デューイの言葉を借りていえば，反省的経験 Reflective Experience が学習に必要だということになるのである。すなわち，やったことを自己の中で再構成し，確実な知識として意味付ける活動が大切なのである。抽象の抽象を繰り返して本質を探る数学の学習で是非とも必要な活動である。」と述べている。

また，「対立－止揚」について池田敏和[3)]は，「現実場面を厳密に分析しようとする考え方」と

「数学的に処理しやすくするための考え方」が有機的に関連・対立合い，「定立→反定立→総合」といった過程を繰り返しモデリングが進展するとしている。そして，「定立→反定立」から対立が生まれ，それを止揚する形でモデリングが進展していく過程を「対立ー止揚」過程と呼んでいる。

2 数学的モデリングの学習プロセス

数学的モデルを生成する過程は，数学的モデリングの学習プロセスの一部である。以下数学的モデルを生成する過程について考えるにあたり，「モデル」「数学的モデル」「数学的モデリングの学習プロセス」の順に概念規定をする。

まず「モデル」については，A. Pinker (1981) [4] による次の定義でモデルを捉える。「ある目的に対して，Mがその目的のためにOの代用となりうるとき，そしてその文脈においてMの研究がOに対して有意義な結果を産出できるというとき，MはOのモデルである」とする。

次に「数学的モデル」については，上述のモデルの定義内において「数学的処理が可能な数式やグラフなどによって事象を表現したもの」と捉える。

最後に「数学的モデリングの学習プロセス」については様々な捉え方があるが，本研究では図１の NCTM [5] の見解を中心とした捉え方をすることとする。すなわち，実生活の問題を単純化することで問題を形成し，この問題を数学的な用語に訳して数学的モデルを得る。このモデルに数学的処理を加えることで数学的解決を得たあと，それを解釈し，妥当性を確かめ，実生活の問題解決に適用する。さらによりよい解決を得たい場合や解決できない場合に，数学的モデルの修正を行うという学習プロセスである。このプロセスの中で，「問題を形成し数学的なモデルを得るまでの過程」と「妥当性を検討し数学的モデルの修正を行う過程」を「数学的モデルを生成する過程」と捉える。

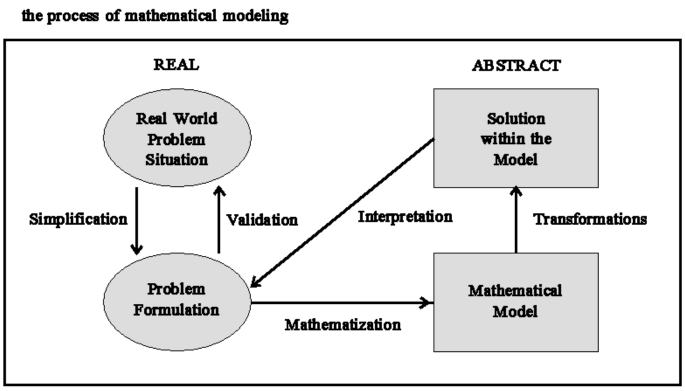


図１．　数学的モデリングの学習プロセス

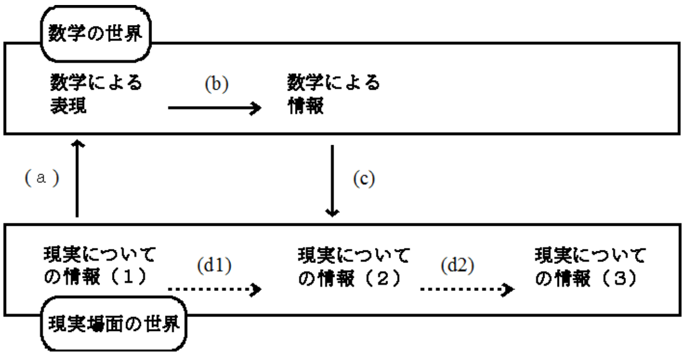


図２．　有効な迂回路としての算数・数学

また学習を通して実感をともなった理解を得られるよう，図２の布川和彦[6] の考え方を取り入れることとする。布川和彦は，問題解決の過程において(a)→(b)→ (c)は(d1)の「迂回路」となっており，この迂回路を経由するメリットは(d2)の操作を経てこそ実感できるものであると述べている。

以上のように数学的モデリングの学習プロセスを捉え，実際の授業構成を数学的モデルを生成する過程を重視した学習プロセスにすることで，生徒が知識を高次化できるようにしたい。

3 理解を深めるということ

「問題は解けたが腑に落ちない。」「理屈は分かるけど…。」自分自身が数学の問題を解いていても，よく経験することである。生徒にとっては尚更であろう。自分がやったことの意味が分からないのである。

数学的な知識は言葉だけでは伝えられない。単なる情報としてではなく，生徒にとって意味のある知識として伝えるためには数学的活動が不可欠であると考える。根本博[2]は，「事実をよく観察し，その事実を成り立たせている背景を見通す行為，これこそ数学的な活動ではないかと考える。」とし，問題解決過程での活動を整理して以下の２つにまとめ，図３のように，それらの２つの行為の相互的な活動の活性化の重要性，特に一般化や概念の統合，拡張などを伴う数学学習では内的行為，内面における行為の自覚が概念の深化のために重要であると述べている。

図３．　数学的活動

ア　計算処理や図形の具体的操作など客観的に観察が可能な活動（外的行為）
イ　類推したり，振り返って考えたりするなどの内面的な活動（内的行為）

内的行為については，狭義には直面する課題を解決するために類推したり，一般化したりする数学に関する思考活動。広義には自分自身を俯瞰することで，自分の活動の意味を振り返り知識の再構成を行う行為であると捉える。

外的行為については文字通り客観的に観察が可能な活動であるが，この行為をさらに２つに分けて捉える。数式による処理で理解する行為と図などによる処理で理解する行為である。根本博[7]は理解の深まりについてピアジェの文献を引用し，「図による説明 figurative understanding と数式による説明 mechanical understanding との対応が分かると一層理解が深まる。つまり，‘やっていることの意味が分かる’からである。ピアジェはこれを operative understanding 呼んだ。」としている。これまでの授業を振り返ってみると，数式による証明は行ってきたが，その数式が図的にはどういった意味をもつのかというアプローチが欠けていたという反省がある。ピアジェの言う figurative understanding がほとんど行われてこなかったのである。figurative understanding ができるよう図による説明を取り入れることで，operative understanding にまで生徒の理解を深めることが大切である。

知識を高次化できるようにする方策

1「対立－止揚」の場の設定

数学的解や解釈の妥当性を検証する段階やこれまでの学習を振り返る場面において知識の高次化が図られると考える。この学習過程において新たな問を形成したり，より一般化されたモデルを考案したり，自分自身の活動を振り返ったりする内的行為が行われると考えるからである。当然この段階においてはメタ認知が必要となるが，生徒のメタ認知を援助するため池田敏和の「対立－止揚」

過程を参考にした。グループで活動することで生徒同士の討論の場面を設定することが，モデリングを促進させ知識の高次化を図る上で有効であると考える。個人の中で自分自身を客観視できない生徒も，２人の他者の意見を聞くことで自然に第３者の立場から物事を見ることができるからである。そしてこの経験が個人内に転移し，第１，第２，第３の自分を作り上げることが期待できる。図４は，池田敏和[8]によるモデリングの指導の枠組みを略図で示し，アレンジしたものである。同氏は「対立－止揚」の枠組みをモデリングの促進のための方策としているが，これを援用し，ここでは知識の高次化のための方策とする。また同氏は以下のように述べている。「モデリングの初心者にとっては，問題をある程度構造化しようがしまいが，個人内で相反する２方向の考え方を相互作用させ，それらを止揚する考え方へと進展させることは非常に難しいことがわかる。それゆえモデリングを促進する考え方を育成するひとつの方策として，生徒同士の討論を積極的に活用することが考えられる。」「教師の重要な役割として，モデリングを促進する２つのタイプの考え方が対立するような場面を設定することが挙げられる。」

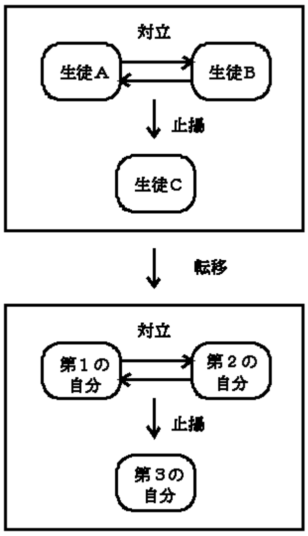


図４．　対立－止揚

以上のことをふまえ，授業において以下の２点の工夫をする。

(1) 問題の工夫

単純化以前の問題を提示すること。単純化した際に多様な課題が生まれ意見の対立が起こるような問題，それらを解決した後に新しい課題を創り出すことができる発展性のある問題とする。また問題によっては必要十分条件を満たさない場合もあるが，知識の高次化をしていくことを重視しているので，そのような問題を除外することはしない。

(2) 場の設定の工夫

グループ学習を行う。この際，個人でワークシートに取り組むのではなく，グループで１枚のワークシートに取り組むようにする。また解決を支援する具体物や筆記用具なども１セットのみ準備し，具体的操作なども共同で行うこととする。このような環境を設定することで，一方が他方に自分の考えを説明せざるを得なくなるため，生徒の思考が顕在化され「対立－止揚」の場面が多く現れるようになると考えるからである。

２ 数学的モデルを生成する過程を重視した学習プロセスの工夫

図５の学習プロセスを提案する。この学習プロセスに沿った授業構成とすることで，指導者も生徒もそれぞれの学習過程において為すべきことが明確になり，主体的学習活動が期待できる。また，妥当性の検討から問題形成に至る過程に授業のポイントを焦点化することで，創造的な数学の学習が期待できると考える。

実生活の問題から学習を始め，単純化，数学化の過程を経て数学的モデルを得る。その後最後に実生活の問題に戻るまでに，数学化，数学的処理，数学的解決の解釈と数学的モデルの妥当性の確認，数学的モデルの修正というサイクルを繰り返す学習過程とする。単純化によって形成された問題を繰り返し考察することで，数学的モデルを洗練させ知識を高次化していく。また布川和彦が指

摘する数学の世界を迂回するメリットを感じさせるため，実生活の問題から実生活の問題へとつながる破線を学習の最後に取り入れることとする。

以下順を追ってこの数学的モデリングの学習プロセスについて述べる。

(1) 単純化（実生活の問題→問題の形成）

実生活の問題状況において，問題解決に関わる可能性のある要素すべてに着目することはできない。問題の本質を洞察・予想し，その解決に必要な対象や相互関係に着目し，それらを取捨選択することによって問題の形成を行う。

(2) 数学化(問題の形成→数学的モデル)

単純化によって形成された問題を，図，式，表，グラフといった数学的表現を用いて表すことで，数学的モデルを作成する。

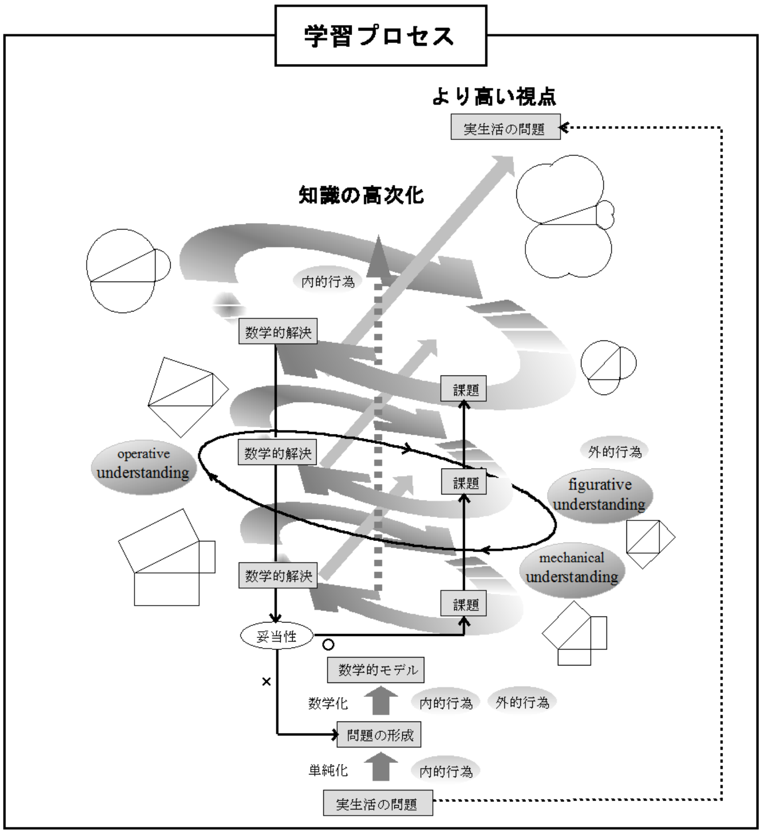


図５．　数学的モデリングの学習プロセス

ここまで(1)・(2)が，２つに分けて捉えた「数学的モデルを生成する過程」の１つにあたる。

(3) 数学的処理（数学的モデル→数学的解決）

数学的な方法を用いて数学的モデルを処理することで数学的解を得る。この際，より実感を伴った理解を得られるよう式による説明と図による説明を関連づけた説明を取り入れることで，生徒の理解が operative understanding にまで深まるようにする。

(4) 妥当性の検討・数学的モデルの修正（数学的解決→新たな課題，問題の形成）

数学的解決とその解釈の妥当性を検討する。妥当な場合は，そこから新たな課題を形成し数学化を行うことで数学的モデルを創り出す。妥当でない場合には，問題の形成に戻る。形成された問題が適切でないか，数学化が適切でないかのどちらかであると考えられる。適切な数学的モデルを作ることで，再び事象の考察を行う。

(1)～(4)の過程を繰り返すことで数学的モデルを洗練させていく。何度かこのサイクルを行った時点で自分自身のこれまでの学習を振り返ることが大切となる。この振り返りにより，次にどのような数学的モデルを生成すれば，知識の高次化や事象の考察に有効であるのか考えることができるからである。例えば，三平方の定理を拡張する際に，「直角三角形の各辺上に正方形や正三角形をかいたとき，斜辺上の図形の面積は他の２辺上の図形の面積の和に等しい。」ということを考察した後で自分自身を振り返る。「正三角形で成り立つなら二等辺三角形ではどうだろう。」「正三角

形でも正方形でも成り立つ。直線図形なら成り立ちそうだ。平行四辺形を調べてみよう。」「直線図形は成り立つ。曲線ではどうか？半円を調べてみよう。」などと考えることがこの振り返りにあたる。

(4)から(2)に戻って新たな数学的モデルを生成する過程が，２つに分けて捉えた「数学的モデルを生成する過程」の１つにあたる。

(5) 実感をともなった理解（実生活の問題→実生活の問題）

上記(1)～(4)のように，数学を迂回路として利用することで実生活の問題が解決される。最後に図２(d2)にあたる操作（図５では破線の矢印）を行うことで，実感をともなった理解を得る。例えば，関数の授業で数学的処理によって得た予想を，授業の最後に実際の実験で確かめることなどがこれにあたる。

池田敏和[3]は，数学的モデリングの指導には２つのアプローチがあるとしている。１つは，モデリング過程における特定の段階に焦点を当て，そこで要求される特定の考え方（問題の本質を明確にする力，数学的モデルを解釈・検討する力など）に焦点を当てて指導していくアプローチである。もう１つはモデリングの全ての過程を経ながら問題を解決していく中で，生徒たちがモデリングを促進する考え方を獲得していくアプローチである。本研究は，実生活の事象や数学の世界における事象を数理的に考察し表現する学習活動の型を身に付けるということに焦点を当てているため，後者のアプローチをとることとする。

授業においては，「今自分が行っている活動にはどのような意味があり，どのようなことにつながっていくのか。」「もともとの問題意識は何だったのか。」各段階が学習プロセス全体の中でどのような意味をもっているのかを意識させることが重要であると考える。自分自身の行動の意味を意識できるよう，声かけを行うとともに数学的モデリングによる学習プロセスのイメージ図を生徒に示すことで生徒を支援する。

3 理解を一層深めるための工夫

内的行為と外的行為，数式による説明と図による説明，これらが相互に繰り返されて理解が深まっていくような学習展開となるような発問をする。「それは何を意味するの？」「そこからどんなことが言えそう？」「図で説明できないかな？」「数式で証明すると？」などと発問することで生徒の理解が深まるようにしたい。また，生徒が「数式による証明と図による説明両方に取り組むのが当たり前」と考える習慣をもつことができるよう，上記のような授業を日々行っていくことも大切である。このことが図６のような operative understanding につながると考える。図による説明には，action proof を活用することとする。action proof について，小松孝太郎[9]は「ある個別の場合を代表的特殊の場合として解釈し，その代表的特殊の場合を通じて具体物に対する諸行為の本質的特徴を提示することによって，事柄が成り立つことを演繹的に示すこと」としている。すなわち，具体物を用いる場合，図７の長方形のようにある個別の場合しか表現できない。そのためこの長方形を「長方形の代表的特殊の場合」と解釈する。この長方形を通じて「具体物に対する諸行為の本質的特徴を提示する」とは，「同様の切り方をすれば任意の相似な長方形は図７と同じように並び替えることができる。また，図形を切って並び替えても面積は変わらない。よって直角三角形の３辺上に長方形をかいた場合，直角をはさむ２辺上に出来る長方形の面積の和は，斜辺上にできる長方形の面

積に等しい。」というように考えることである。したがって action proof は，図をかいたり動かしたりという単純な外的行為ではなく，内的行為を含むものであると捉える。授業においては，生徒が具体物を単なる具体物として見るのではなくその背後に一般を見ているかどうか，ある操作を行う際にその操作がいつでもどんな時にも可能かという視点をしっかり保持しているかという点に注意する必要がある。さらに生徒が具体物をどのように見ているのかをきちんと意識させることが，視点の変更という新たな発想を生むと考える。よって生徒の視点を把握した上で，「ここに線をひいてみたら…。」「図を動かしてみたら…。」というように視点の変更を示唆するような発問をすることが大切であると考える。

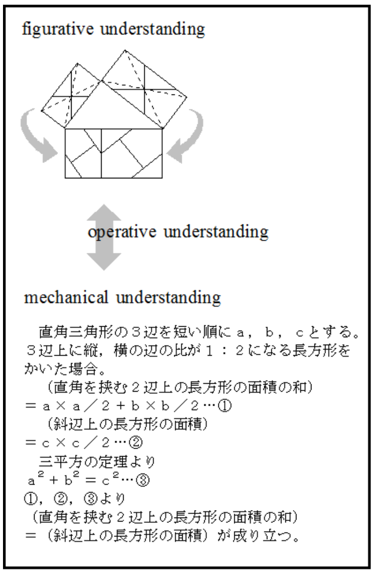


図６．operative understanding

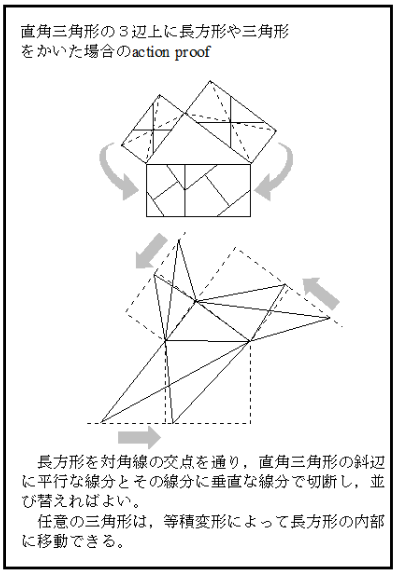


図７．　action proof

授業の構想

1 単 元 名　　三平方の定理

2 単元の目標

○　様々な事象を三平方の定理でとらえたり，平面図形の基本的な性質や関係を見いだしたりするなど，数学的に考え表現することに関心をもち，意欲的に数学を問題の解決に活用して考えたり，判断したりしようとする。（数学への関心・意欲・態度）

○　三平方の定理についての基礎的・基本的な知識及び技能を活用しながら，事象に潜む関係や法則を見いだしたり，数学的な推論の方法を用いて論理的に考察し表現したり，その過程を振り返って考えを深めたりすることができる。（数学的な見方や考え方）

○　三平方の定理を用いて直角三角形の辺の長さを求めたり，三平方の定理の逆を用いて直角を作図したりすることができる。（数学的な技能）

○　三平方の定理の意味とそれが証明できることを理解している。

（数量や図形などについての知識・理解）

３　指導と評価の計画（１７時間扱い）

第１次　三平方の定理　　　　　　　４時間
第２次　三平方の定理と図形の計量　６時間
第３次　三平方の定理の利用　　　　２時間
第４次　三平方の定理の拡張　　　　４時間

時	学習内容	評価規準
1	実生活の場面で直角三角形とその各辺上にできる図形について観察し，様々な仮説を立てる。	辺の長さや角の大きさなど，図形の様々な構成要素に着目して仮説を立てようとする。（関）
2 3	前時で立てた仮説を１つずつ検証し，徐々に一般化を図る。	検証結果とその解釈の妥当性を検討し，課題設定を見直したり，新たな課題を発見したりできる。（考）
4	前時までに得られた検証結果を考察することで，さらなる一般化を図る。	検証結果を考察し，三平方の定理を拡張して捉えることができる。（考）

７章の問題　　　　　　　　　　　　１時間

４　第３次の指導（４時間扱い）

⑴　第3次の目標

○　辺の長さや角の大きさなど，図形の様々な構成要素に着目して仮説を立てようとする。
（数学への関心・意欲・態度）

○　検証結果とその解釈の妥当性を検討し，課題設定を見直したり，新たな課題を発見したりできる。
（数学的な見方や考え方）

○　検証結果を考察し，三平方の定理を拡張して捉えることができる。（数学的な見方や考え方）

⑵　**準備・資料**

ピタゴラスと床のタイルのエピソードの挿し絵，作図用方眼紙，数学的モデリング過程の学習プロセスイメージ図，直角二等辺三角形の画用紙，ＮＨＫ高校講座の三平方の定理に関するＶＴＲ

⑶　**指導に当たっての留意点**

①　相似比がａ：ｂならば面積比は$ａ^2$：$ｂ^2$の関係を使えば問題は解決するが，本時の目標とは違うので，授業の最後に触れる。

②　授業のまとめは「相似な図形をかいたとき，直角三角形の直角を挟む２辺上にかいた２つの図形の面積の和と斜辺上にかいた図形の面積は等しい。」とし，相似でなくても成り立つ場合については発展的な扱いとする。

③　一般化

数学的処理が完了した段階で，「～の場合はどうだろう？」「すべての場合に言えるかな？」「どんな場合は成り立って，どんな場合は成り立たないのだろう？」などと一般化を促す発問をしながら徐々に一般化を図っていく。

ア　一般化の方向

一般化の方向としては，図８のＡ，Ｂ２種類が考えられるが，言葉での表現のしやすさと授業展開を考え，指導案ではＢの方向で授業を展開することとする。

イ　一般化の段階

上記Ｂの方向で一般化を図っていく際，一般化の段階を図９のように捉えて指導に当たる。また，生徒の発想は多様であるため，図９Ｂの場面が起こる前に(ｳ)と(ｴ)を対立させる生徒なども考えられるが，生徒の発想を生かした支援を行う。さらに，生徒の疑問の中から一般化のアイディアが生まれてくるよう丁寧な指導を行う。どうしても，次の問題を形成できないような場合のみ，授業者が課題を提示することとする。

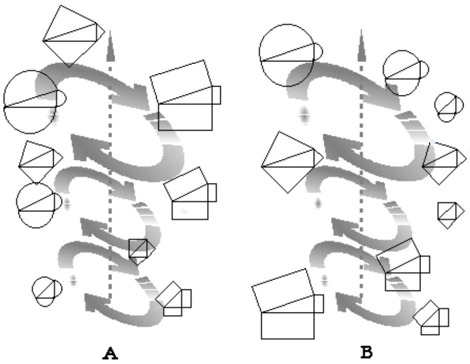


図８．　一般化の方向

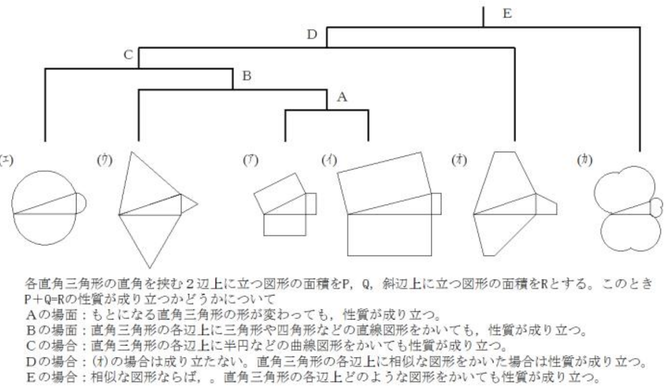
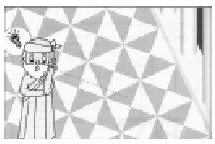
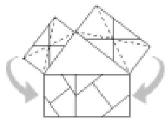
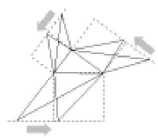


図９．　一般化の段階

(4) 展開

学習内容・活動	教師の支援（○）・評価（◎）
＜第１時＞ １　問題をつかむ。（全体） 実生活の問題 ピタゴラスは右のような床の模様を見て，三平方の定理を発見しました。ピタゴラスになったつもりで，他の性質を探してみましょう。 ２　仮説を考える。（個人） 問題の形成 ＜予想される生徒の反応＞ 直角二等辺三角形の３辺上に… ・　直角二等辺三角形や正三角形をかいても，斜辺上にできる図形と直角を挟む２辺上にできる図形の面積の和は同じ。 ・　直角三角形の３辺上にかいた辺の長さの和（角の大きさの和）はどうだろう。 ・　重さも同じになるんじゃない？ ・　もとの直角二等辺三角形が二等辺じゃない時は？	10) ○　ピタゴラスについての数学史的な話をして動機付けとする。  ○　実生活の問題を提示することで，様々な課題が生まれるようにする。 ○　どのような観点で図を見ればよいか確認する。 ○　仮説の検証をするのではなく，できるだけたくさん仮説を出すよう指示する。 ○　仮説が思い浮かばない生徒には，具体物を使って考えるよう助言する。 ○　個人的な課題意識をもたせるために行う活動なので，相談はしないように指示する。 ○　仮説を自分の言葉で表現するよう指示する。 ○　必要に応じて挿し絵に作図するよう指示する。

3　仮説を整理する。（グループ） 問題の形成 ・　お互いの仮説を比較検討し，問題の形成を行う。 ・　方眼紙に図をかき，仮説を整理する。さらに仮説を文章にする。 ・　グループとして仮説として残すべき仮説，そうでないものを決定する。	○　具体的操作ができるよう，直角二等辺三角形の画用紙を用意して支援する。 ○　各自が作業を行うのではなく，グループで１枚の方眼紙を使って活動する。 ○　必要に応じて白紙に作図するよう助言する。 ◎　辺の長さや角の大きさなど，図形の様々な構成要素に着目して仮説を立てようとしている。（関）
4　次時の課題を確認する。（全体） <第２・３時> 5　課題をつかむ。（全体） 数学的モデル 3辺の長さが１，１，$\sqrt{2}$の直角二等辺三角形について，各辺上にそれぞれの辺を１辺とする長方形をかいた。この時，直角を挟む２辺上の図形の面積をＰ，Ｑ，斜辺上の図形の面積をＲとすると，Ｐ＋Ｑ＝Ｒが成り立つことを証明しよう。	○　数学的モデリングの学習プロセスイメージ図を見せ，特殊から一般へと順次学習を進めていけるよう助言する。 ○　相似な長方形を示すようにする。
6　課題に取り組む（グループ） ・　数式によってＰ＋Ｑ＝Ｒが成り立つことを示す。 ・　図によって説明する。（マス目を数える。） ・　自分の言葉でまとめる 長方形をかいた場合Ｐ＋Ｑ＝Ｒが成り立つ。 問題の形成 もとになる直角三角形の辺の長さを変えたら…。	○　各自が作業を行うのではなく，グループで１枚の方眼紙を使って活動するよう指示する。 ○　図による説明，計算による説明，両方に取り組むよう指示する。 ○　考察結果からどのようなことが言えそうか相談して予想するよう助言する。 ○　新たな課題の方向として，P．8図８Ａ，Ｂ２つの方向が考えられるが，グループによってＡ，Ｂ２方向に進むと授業が煩雑になること，Ａの方向は言葉でまとめにくいことを考え，Ｂの方向に誘導する。
7　課題に取り組む。（グループ） 数学的モデル もとになる直角二等辺三角形の３辺の長さが変わっても，各辺上にそれぞれの辺を１辺とする長方形をかいた時Ｐ＋Ｑ＝Ｒが成り立つことを証明しよう。 ・　計算によってＰ＋Ｑ＝Ｒが成り立つことを示す。 ・　図による説明をする。（マス目を数える。） ・　文字を用いて一般化した証明する。 もとの直角二等辺三角形は二等辺でなくてもも，直角三角形の各辺を１辺とする長方形をかけば，Ｐ＋Ｑ＝Ｒが成り立つ。 問題の形成　※　知識の高次化 各辺上に正三角形（直角三角形，平行四辺形）をかいたら？適当な台形をかいたら？	○　図による説明，計算による説明，両方に取り組むよう指示する。 ○　各グループが文字を使った説明を終えた段階で右図を提示して説明する。  ○　考察結果からどのようなことが言えそうか相談して予想するよう助言する。 ※　以下同様の流れで授業を進めるが，図による説明についてはマス目を数えることにも限界があるので，等積変形の考え方を助言する。 
各辺上に正三角形（直角三角形，平行四辺形）をかいてもＰ＋Ｑ＝Ｒが成り立つ。 各辺上に適当な台形をかいたらＰ＋Ｑ＝Ｒが成り立たなかった。	○　長方形以外に正三角形や直角二等辺三角形などの証明ができた時点で，グループの話し合いからＰ＋Ｑ＝Ｒが成り立たない場合が出ない時には，相似でない図形で性質が成り立たない場合を示す。 ○　成り立たない場合について取り組んだグループには，直角二等辺三角形の場合と見比べ，成り立ちそうな場合をもう一度調べるよう助言する。 ◎　検証結果とその解釈の妥当性を検討し，課題設定を見直したり，新たな課題を発見したりできる。

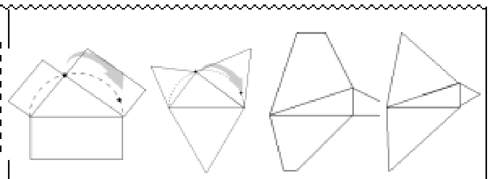
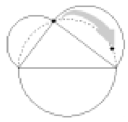
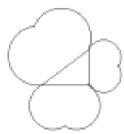
Ｐ＋Ｑ＝Ｒが成り立つ場合（２種）と成り立たない場合（１種）がある。相似でなくても成り立つ場合もある。	
問題の形成　※　知識の高次化 相似な図形ならばＰ＋Ｑ＝Ｒが成り立つ？半円では？	○　これまでの考察結果を見比べて，どのようなことが言えそうか，相談するよう助言する。
＜第４時＞ 8　課題に取り組む。 数学的モデル 直角二等辺三角形の各辺上に半円をかいても，Ｐ＋Ｑ＝Ｒが成り立つことを証明しよう。	○　半円の場合は図による説明はできないことを伝える。
・　文字による証明を行う。 半円でも成り立つ。やはり相似な図形ならばＰ＋Ｑ＝Ｒが成り立つ。	
問題の形成　※　知識の高次化 相似？半円以外の複雑な図形では？	
9　課題に取り組む（全体） 数学的モデル 右のような図形でＰ＋Ｑ＝Ｒが成り立つことを証明しよう。	○　全体で意見を出し合いながら，直角三角形の各辺上にできる図形が正三角形と半円の複合図形であることを発見する。  ○　各自で証明に取り組んだ後，全体で証明を確認する。
10　映像で確認する。 実感をともなった理解 ビデオによる証明で直角三角形の３辺上に半円をかいた場合と複雑な図形をかいた場合に P+Q=R が成り立つことを確かめる。	[11] ○　ビデオを見せることで実感をともなった理解を促す。 ○　相似比がａ：ｂ：ｃならば面積比はａ^2：ｂ^2：ｃ^2。三平方の定理よりａ^2＋ｂ^2＝ｃ^2，だからＰ＋Ｑ＝Ｒが成り立つ。
直角三角形の３辺上に相似な図形をかいたとき，直角を挟む２辺上の図形の面積の和は，斜辺上の図形の面積に等しい。	
11　授業の反省をする。	◎　検証結果を考察し，三平方の定理を拡張して捉えることができる。

図 10.　　展開案

研究のまとめと今後の課題

１　研究のまとめ

本研究では, 知識の高次化を目指して主体的に事象を考察する生徒を育成することを目的として, 主に知識の高次化，数学的モデリングの学習プロセス，理解の深まりの３点について研究を進めてきた。この研究を通して次のようなことが分かった。

○　知識の高次化

知識の高次化を「対立－止揚」という観点から見ることで，生徒の思考を整理して捉えることができるようになった。別の観点から生徒の思考を捉える方法もあるかもしれないが，観点を設定して整理するということの大切さが分かった。

また方法論としてだが，場の設定の工夫は生徒の思考の一般化のために有効であろうと考える。

○　数学的モデリングの学習プロセス

この研究を行うまで, 数学的モデリングの学習プロセスを「実生活の問題を数学を用いて解決し, 実生活に戻し問題の解決を図る。」と漠然と捉えていたが，妥当性の検討やモデルの修正という過程がとても重要な意味をもっていることに気付いた。また，数学的モデリングの学習プロセス全体の中で数学的モデルの生成過程に焦点を当てることができたことは，今後の研究を深めていく上でのよいきっかけとなった。

生徒自身が問題解決型の学習に取り組む学習プロセスを理解することで，主体的に事象を考察する活動が生まれることが期待できる。

○　理解の深まり

これまで自分の指導に欠けていた figurative understanding について研修することができたことは, とても有意義であった。図による説明はすぐにでも授業に取り入れることができる。学校に戻ってから実践し，成果を上げたいと考えている。

以上３点についてそれぞれ考えを述べたが，これら３つのことを整理し，学習過程として自分なりに整理できたことが一番の成果であると考える。

２　今後の課題

○　「対立－止揚」過程

「対立－止揚」の状況は様々な状況が考えられる。今回は一般化の方向を誘導して限定したり, 「対立－止揚」の状況を概況で予想するだけだったりと，この過程の概要を捉えるだけになってしまった。実際に授業を行い，生徒の思考を綿密に分析する必要がある。

○　数学的モデリングを促進する考え方

今回は「数学的モデルを生成する過程」を重視しつつも，数学的モデリングの学習プロセス全てに取り組む授業展開の研究となった。今後は数学的モデリングの学習プロセスにおける特定の段階に焦点を当て，そこで要求される特定の考え方を指導していく学習指導の在り方についても研究を進めていきたい。特に，実生活の事象から問題形成を行うまでの過程を研究することで，生徒の問題解決能力を育てていきたい。

○　教材の開発

今回提案した学習プロセスを他の領域でも使えるよう，教材開発を行っていきたいと考える。数学的モデルを１つ作れば簡単に解決できてしまうような問題ではなく，２度３度と数学的モデルを修正しながら問題解決が図られるような題材を実生活の中から見つけられるようにしたい。

またどの程度問題状況を単純化して生徒に示すのかなど，教材の条件を整理することも必要であると考える。

注

1) 文部科学省『言語活動の充実に関する指導事例集 』（文部科学省， 2010）.
2) 根本博『数学的活動と反省的経験』（東洋館出版社，1999）, 27-28, 92.
3) 池田敏和「数学的モデリングを促進する考え方に焦点を当てた指導目標の系列と授業構成に関する研究」『日本数学教育学会誌.数学教育学論究』, 81･82, 2004, 3-32.
4) A. Pinker "The concept 'model' and its potential role in mathematics education", *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology vol.12 no.6* (1981), 693-707.
5) National Council of Teachers of Mathematics "MATHEMATICS AS PROBLEM SOLVING", *Curriculum and Evaluations STNDARDS for Mathematics,* （1989）,137-139.
6) 布川和彦「有効な迂回路としての数学」『上越数学教育研究会Σ会（編）， 今こそ Do Math!』, 2003, 25-34.
7) 根本博『数学教育の挑戦』（東洋館出版社，2004）, 246.
8) 池田敏和「数学的モデリングを促進する考え方に関する研究」『日本数学教育学会誌.数学教育学論究』, 71･72, 1999, 3-18.
9) 小松孝太郎「数学的探求にける action proof の活用の促進－事例研究を通して－」『日本数学教育学会誌.数学教育学論究』, 93, 2010, 3-29.
10) 岡本和夫ほか『未来へひろがる数学』（啓林館，2005）
11) NHK 高校講座『数学基礎第 8 回 図形の科学と人間の歩み(1) 三平方の定理とピタゴラス』(NHK）