茨城大学教育実践研究 **32**(2013), 33-47

標本分布の散らばりに関する学習者の誤判断とその修正

―― 標本分布の性質の教授による効果 ――

小 口 祐 一*

(2013 年 9 月 17 日受理)

Misjudgments of variation of a sample distribution: Effects of teaching rules on a sample distribution

Yuichi OGUCHI

キーワード:標本分布，散らばり，誤判断，ルール

標本分布の散らばりに関する問題に対して，多くの大学生に誤判断がみられる。その要因として，高等学校数学において，標本分布の性質を学習していなかったことが想定される。そうだとすれば，標本分布の性質を指導することにより，適切判断ができることが期待される。本研究の目的は，標本分布の性質を指導すれば，標本分布の散らばりに関する問題に対して，学習者は適切判断ができるかを検証することである。本研究では，次の 2 つの仮説を設定した。仮説 1:標本比率の性質を指導すれば，標本比率の散らばりに関する問題に対して，学習者は適切判断ができるだろう。仮説 2:標本平均の性質を指導すれば，標本平均の散らばりに関する問題に対して，学習者は適切判断ができるだろう。学習セクションで標本分布の性質を教授し，その前後における対象者の反応を分析した。結論として，標本比率の性質を指導すれば，半数近い学習者は適切判断ができることと，標本平均の性質を指導すれば，半数近い学習者は適切判断ができることを示した。

はじめに

これまでの先行研究で，標本分布の散らばりに関する問題に対して，多くの学習者は誤った判断をすることが示されている（Kahneman, Slovic & Tversky，1982； Gilovich, Griffin & Kahneman，2002）。標本分布とは，標本平均や標本比率など，標本統計量の分布のことである。Garfield and delMas（2005）は，CAOS（Comprehensive Assessment of Outcomes in a first course in Statistics）を利用して，1470 名の大学生を対象に統計の到達度調査を実施した。調査結果には，標本の大きさが異なる 2 つの標本比率の散らばりを比較する問題に対して，約半数の対象者に「標本の大きさが異なっていても，標本比率の散らばりは同じである。」という誤判断（以降「標本比率の誤判断」という。）がみられた。

---

*茨城大学教育学部

筆者が，CAOS を利用して，大学生を対象に実施した調査では，約 7 割の対象者に標本比率の誤判断がみられた（小口，2008)。標本の大きさが異なる 2 つの標本比率の散らばりを比較する問題は，大数の法則を適用すれば解決が可能である。大数の法則とは「標本の大きさが大きくなるに従って，標本比率は母比率に近づく。」というルールである。学校数学では，中学校第 2 学年の「確率」において，コイン投げの反復試行でオモテが出る割合が 2 分の 1 に近づく体験などを通して，大数の法則を学習する（文部科学省，2008)。中学校におけるこのような学習は，大数の法則の直観的な理解を促すものである。さらに，高等学校数学 B（平成 23 年度までは数学 C）の「統計的な推測」において，「標本比率の期待値と標準偏差」の公式を用いて大数の法則を学習する（文部科学省，2009)。しかしながら，高等学校数学 B（平成 23 年度までは数学 C）は，内容を選択して学習するオプション科目であり，多くの生徒は「統計的な推測」の内容を学習せずに大学へ入学する可能性がある。そうだとすれば，「標本比率の期待値と標準偏差」の公式を含む標本分布の性質を指導することにより，標本分布の散らばりに関する問題に対して，適切判断ができることが期待される。

本研究の目的は，「標本比率の期待値と標準偏差」の公式を含む標本分布の性質を指導すれば，標本分布の散らばりに関する問題に対して，学習者は適切判断ができるかを検証することである。そこで，本研究では次の 2 つの仮説を設定した。

仮説 1：標本比率の性質を指導すれば，標本比率の散らばりに関する問題に対して，学習者は適切判断ができるだろう。

仮説 2：標本平均の性質を指導すれば，標本平均の散らばりに関する問題に対して，学習者は適切判断ができるだろう。

標本分布の性質

本研究を進める準備として，標本分布の性質にはどのようなものが含まれるかを整理する。まず，確率分布を定義する。ある現象が，n 個の排反事象（A_1，A_2，…A_n）に分かれていて，それぞれの確率は（p_1，p_2，…p_n）であるとする。ある事象 A_i（i＝1，2，…n）が起こったときにとる変数 x の値を x_i（i＝1，2，…n）とすると，次の表が得られる。

x	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

この変数 x を確率変数といい，変数 x と確率 p が対応している表を x の確率分布という。たとえば，目の出方が公平なサイコロを振ってある目が出る現象が，1 から 6 までの目が出る排反事象に分かれていて，それぞれの確率は 6 分の 1 であるとき，確率分布として次の表が得られる。

x	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

次に，標本平均と標本比率は，それぞれ確率変数であることから，標本分布の性質を導く。

標本平均の性質

母平均 μ，母標準偏差 σ の母集団から，大きさ n の標本 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を抽出するとき，これらの平均値を標本平均 $\bar{x}$ という。

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

標本平均において，標本 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ のそれぞれの値は，母集団分布に従う互いに独立な確率変数となるから，標本の期待値と分散は,

$$E(x_1) = E(x_2) = \cdots = E(x_n) = \mu \qquad s^2(x_1) = s^2(x_2) = \cdots = s^2(x_n) = \sigma^2$$

よって，独立な確率変数の和の性質から,

$$E(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = E(x_1) + E(x_2) + \cdots + E(x_n) = n\mu$$

$$s^2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = s^2(x_1) + s^2(x_2) + \cdots + s^2(x_n) = n\sigma^2$$

$$s(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \sqrt{n}\sigma$$

したがって，標本平均の期待値と標準偏差は,

$$E(\bar{x}) = \frac{E(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} = \frac{\sqrt{n}\sigma}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

これらの公式から,「標本の大きさが大きければ，標本平均の散らばり（標準偏差）は小さい。」（以降「標本平均の変動性」という。）と,「標本の大きさが小さければ，標本平均の散らばり（標準偏差）は大きい。」（以降「標本平均の変動性の裏命題」という。）というルールが導かれる。

さらに，中心極限定理から,「標本の大きさが大きければ，標本平均の分布は近似的に正規分布に従う。」（以降「標本平均の分布の正規近似」という。）というルールを導くことができる。

中心極限定理とは，互いに独立な確率変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ について,

$$X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \qquad U_n = \frac{X_n - E(X_n)}{s(X_n)}$$

とおくと，n→∞のとき，U_n の分布は標準正規分布 N(0, 1)に近づくという定理である。

標本比率の性質

ある現象が，2 個の排反事象（A_1，A_2）に分かれていて，事象 A が起こる確率は p であるとする。事象 A の要素を 1，事象 A でない要素を 0 で表したとき，確率分布として次の表が得られる。

x	0	1
p	1−p	p

よって，この母集団で事象 A が起こる母比率と母標準偏差は，

$$E(x) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

$$\sigma(x) = \sqrt{(0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 p} = \sqrt{p(1-p)}$$

したがって，標本比率の期待値と標準偏差は，

$$E(\bar{x}) = \frac{E(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} = \frac{np}{n} = p$$

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x + x + \cdots x)}{n} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

これらの公式から，「標本の大きさが大きければ，標本比率の散らばり（標準偏差）は小さい。」（以降「標本比率の変動性」という。）と，「標本の大きさが小さければ，標本比率の散らばり（標準偏差）は大きい。」（以降「標本比率の変動性の裏命題」という。）というルールが導かれる。

大数の法則は，標本比率の変動性のルールに基づいて，標本の大きさが大きくなるに従って，標本比率の標準偏差は 0 に近づくことから導かれる。ただし，厳密な証明はチェビシェフの不等式を用いて示される。

チェビシェフの不等式とは，確率変数 x の平均値が μ，標準偏差が σ のとき，k（>0）に対して，

$$P(|x - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

という不等式である。

さらに，中心極限定理から，「標本の大きさが大きければ，標本比率の分布は近似的に正規分布に従う。」（以降「標本比率の分布の正規近似」という。）というルールを導くことができる。

本研究は，以上の標本分布の性質を指導する前後において，学習者の判断が変わるかを検証する。

方法

調査の概要

対象者は，私立大学文学部の学生 45 名である。2008 年 10 月 7 日に事前調査，2008 年 12 月 16 日に標本分布の性質に関する学習セクションと事後調査を実施した。

調査問題

本研究では，CAOS（Garfield and delMas，2005）から，キャンディー問題（図１）と得点分布問題（図５），Kahneman and Tversky（1972）の研究から，産科病院問題（図２）の計 3 問を利用した。キャンディー問題は，茶色のキャンディーを 50%生産している工場があり，大きなサイズのバッグと小さなサイズのバッグで，茶色のキャンディーが 70%以上入っている可能性が高い方を選択する問題である。産科病院問題は，1 日に生まれる赤ちゃんの数が約 45 人の大きい病院と，約 15 人の小さい病院があり，1 年を通して男の子が生まれる割合が 60%以上の日が多い病院を選択する問題である。得点分布問題は，分布の形状が異なる 4 つのグラフから，大きさ 1000 の標本の分布を選択する小問と，大きさ 50 の標本 1000 個の標本平均の分布を選択する小問で構成された問題である。

事前調査

対象者に，キャンディー問題（図１）と産科病院問題（図２）の計 2 問を 10 分で回答してもらった。また，高等学校数学 C（対象者は，平成 23 年度以前の高校生であった。）で「統計的な推測」の内容を学習したかを回答してもらった。

学習セクション

まず，身長問題（図３）を用いて，グラフ関数電卓で母集団分布と標本平均の分布を表示させ，それらの形状を比較させて，「標本平均の分布の正規近似」のルールを教示した（小口，2010）。次に，数式で標本平均の期待値と標準偏差の公式を導いた。これらの公式を用いて，母集団分布と標本平均の分布の散らばり（標準偏差）を比較させ，「標本平均の変動性」と「標本平均の変動性の裏命題」のルールをクラス全体で確認した。さらに，数式で標本比率の期待値と標準偏差の公式を導いた。これらの公式を用いて，母集団分布と標本比率の分布の散らばり（標準偏差）を比較させ，「標本比率の変動性」と「標本比率の変動性の裏命題」のルールをクラス全体で確認した。

事後調査

事後調査では，事前調査の結果を知らせることなく，キャンディー問題（図１），産科病院問題（図２）と得点分布問題（図５）の計 3 問を 15 分で回答してもらった。

結果と考察

事前調査の結果

すべての対象者は，高等学校数学 C で「統計的な推測」の内容を学習していなかった．ここでは，問1のキャンディー問題と問2の産科病院問題に対する反応から，標本比率の性質を指導する前に，どれくらいの対象者が標本比率の誤判断をするかを調査した。

問 1 では，「標本の大きさが小さければ，茶色のキャンディーが入っている割合の散らばりは大きい。」という適切判断とみなせる選択肢③を正答とした。

問 1 の正答率は 13.3％であり，誤答⑤の反応率は 71.1％であった。この結果は，約 7 割の対象者

が「標本の大きさが異なっていても，茶色のキャンディーが入っている割合の散らばりは同じである。」という誤判断をしたことを示している。

【問 1】　あるキャンディー工場では，茶色のキャンディーを 50%，他の色のキャンディーを 50%生産している。S 男はキャンディーがたくさん入っている大きなサイズのバッグを買おうと計画している。K 子はキャンディーが少しだけ入っている小さなサイズのバッグを買おうと計画している。どちらのバッグの方が，茶色のキャンディーが 70%以上入っている可能性が高いでしょうか。

① S 男。なぜなら，大きなサイズのバッグにはより多くのキャンディーが入っているので，より多くの茶色のキャンディーを入れることができるから。
② S 男。なぜなら，大きなサイズのバッグに入っている茶色のキャンディーの割合は散らばりが大きいから。
③ K 子。なぜなら，小さなサイズのバッグに入っている茶色のキャンディーの割合は散らばりが大きいから。
④ K 子。なぜなら，小さなサイズのバッグには大抵 50%以上の茶色のキャンディーが入るだろうから。
⑤ どちらも同じ可能性。なぜなら，それらはどちらも無作為抽出だから。

図１　キャンディー問題

表１　事前調査問 1 に対する反応

選択肢	①	②	③ (正答)	④	⑤	計
度数 (反応率)	1 (2.2)	3 (6.7)	6 (13.3)	3 (6.7)	32 (71.1)	45

問 2 では，「標本の大きさが小さければ，男の子が生まれる割合の散らばりは大きい。」という適切判断とみなせる選択肢②を正答とした。

問 2 の正答率は 40.0%であり，誤答③の反応率は 44.4%であった。この結果は，4 割強の対象者が「標本の大きさが異なっていても，男の子が生まれる割合の散らばりは同じである。」という誤判断をしたことを示している。

問 1 と問 2 の結果を総合すると，事前調査の時点で，少なくとも 4 割強の対象者は，標本比率の誤判断をしていたといえる。

【問 2】　A 市には 2 つの病院がある。大きい方の病院には毎日約 45 人の赤ちゃんが生まれ，小さい方の病院には毎日約 15 人の赤ちゃんが生まれる。もちろん，1 年を通してみれば約 50%の赤ちゃんが男の子であるが，日によっては男の子の割合が 60%以上の日もある。さて，そのような日が多いのは，どちらの病院の方だろうか。

① 大きい方の病院。
② 小さい方の病院。
③ どちらも同じ。

図２　産科病院問題

表２　事前調査問 2 に対する反応

選択肢	①	② （正答）	③	計
度数 （反応率）	7 （15.6）	18 （40.0）	20 （44.4）	45

学習セクションの結果

学習セクションにおいて，標本分布の性質を指導した。ここでは，5 人の身長からなる母集団から，大きさ 2 の標本を無作為抽出する身長問題（図３）を利用した（丹慶，2003）。

【例題】　次の 5 人の身長からなる小さな母集団から，大きさ 2 の標本を無作為抽出する。抽出した個体を母集団に戻してから，次の個体を抽出する方法（復元抽出）を用いると，全部で 25 通りの標本を抽出することができる。

身長：174，166，168，177，170　　（単位：cm）

(1) 25 通りの標本について，それぞれの平均値を求めなさい。
(2) 母集団分布と標本平均の分布をヒストグラムで表示しなさい。
(3) 母平均 μ と標本平均の期待値 $E(\overline{X})$ との間には，どのような関係がありますか。
(4) 母分散 σ^2 と標本平均の分散 $V(\overline{X})$ との間には，どのような関係がありますか。

図３　身長問題

第 1 に，25 通りの標本について，それぞれの平均値を計算で求めさせた。

第 2 に，グラフ関数電卓で母集団分布と標本平均の分布を表示させ，それらの形状を比較させた（図 4 ）。そして，標本平均の分布の形状に着目させ，「標本平均の分布の正規近似」のルールを教示した（小口，2010）。

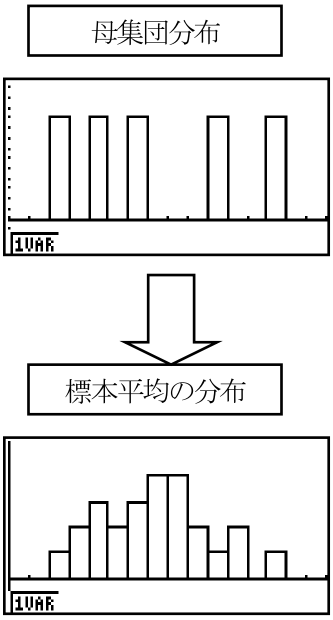


図 4　母集団分布と標本平均の分布の比較

第 3 に，母平均と母分散，及び標本平均の期待値と分散を計算で求めさせ，それらの関連について，クラスで話し合わせた。5 人の身長の母平均と母分散は,

$$\mu = \frac{174 + 166 + 168 + 177 + 170}{5} = 171$$

$$\sigma^2 = \frac{(174-171)^2 + (166-171)^2 + (168-171)^2 + (177-171)^2 + (170-171)^2}{5} = 16$$

また，標本平均の期待値と分散は,

$$E(\bar{x}) = 171 \qquad V(\bar{x}) = 8$$

これらの計算結果から，標本平均の期待値と母平均は等しいことと，標本の大きさが 2 ならば,標本平均の分散は母分散の 2 分の 1 になることを推測させた。

第 4 に，数式で標本平均の期待値と標準偏差の公式を導き，標本の大きさが 2 ならば，標本平均の分散は母分散の 2 分の 1 になるという推測の正しさをクラス全体で確認した。そして,「標本平均の変動性」と「標本平均の変動性の裏命題」のルールを教示した。

最後に，数式で標本比率の期待値と標準偏差の公式を導き,「標本比率の変動性」と「標本比率の変動性の裏命題」のルールを教示した。以上，対象者は，学習セクションにおいて，標本分布の散らばりに関する問題に対して，適切判断ができるために必要となる標本分布の性質を学習した。

事後調査の結果

事後調査の問 1，問 2 は，事前調査の問 1，問 2 と同一問題である。

問 1 の正答は選択肢③である。問 1 で, 母集団はこの工場で生産されるキャンディー全体である。この母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，茶色のキャンディーが入っている割合 R の期待値と標準偏差は,

$$E(R)=0.5 \qquad s(R)=\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{n}}=\frac{0.5}{\sqrt{n}}$$

よって，標本の大きさ n の値が小さい方が，標本比率の標準偏差は大きくなるため，茶色のキャンディーが入っている割合の散らばりは大きいことがわかる。

事後調査における問 1 の正答率は 64.4%であり，事前調査の正答率（13.3%）より 51.1 ポイント高かった。事前調査で誤答⑤の反応をした 32 名のうち 21 名（65.6%）は，事後調査で正答した。問 1 について，事前調査と事後調査の正答率に有意差がみられた［マクネマー検定：$\chi^2(1, N=45)=17.93, p<.01.$］。問 1 の結果は，標本比率の性質を指導すれば，標本比率の散らばりに関する問題に対して，約 3 分の 2 の学習者は適切判断ができることを示している。

問 2 の正答は選択肢②である。問 2 で，母集団は産科病院で生まれるすべての赤ちゃんである。この母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき, 大きい病院で生まれる男の子の割合 R_1 の期待値と標準偏差は,

$$E(R_1)=0.5 \qquad s(R_1)=\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{45}}=\frac{0.5}{3\sqrt{5}}$$

一方，小さい病院で生まれる男の子の割合 R_2 の期待値と標準偏差は,

$$E(R_2)=0.5 \qquad s(R_2)=\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{15}}=\frac{0.5}{\sqrt{15}}$$

よって，小さい病院の方が，標本比率の標準偏差は大きくなるため，男の子が生まれる割合の散らばりは大きいことがわかる。

事後調査における問 2 の正答率は 44.4%であり，事前調査の正答率（40.0%）より 4.4 ポイント高かった。事前調査で誤答③の反応をした 20 名のうち 8 名（40.0%）は，事後調査で正答した。一方，事前調査で正答した 18 名のうち 9 名（50.0%）は，事後調査で誤答③の反応をした。問 2 について，事前調査と事後調査の正答率に有意な差は認められなかった［マクネマー検定：$\chi^2(1, N=45)=0.05$, n.s.］。問 2 の結果は，標本比率の性質を指導すれば，標本比率の散らばりに関する問題に対して，半数近い学習者は適切判断ができることを示している。一方，事前調査で正答した対象者の半数が事後調査で誤答③の反応に変わったことは，留意すべき点である。問 2 の問題場面には，学習者の適切判断を阻害する要因が含まれている可能性があるといえる。

表３　問１の事前事後クロス集計

事後 / 事前	①	②	③（正答）	④	⑤	計
①	0	0	0	0	1	1 (2.2)
②	0	1	2	0	0	3 (6.7)
③（正答）	0	1	4	0	1	6 (13.3)
④	0	0	2	0	1	3 (6.7)
⑤	2	4	21	0	5	32 (71.1)
計	2 (4.4)	6 (13.3)	29 (64.4)	0 (0.0)	8 (17.8)	45

（　）内は反応率

表４　問２の事前事後クロス集計

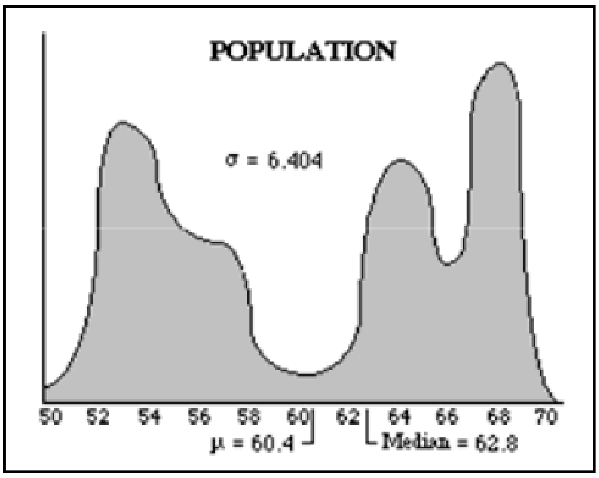
事後 / 事前	①	②（正答）	③	計
①	3	3	1	7 (15.6)
②（正答）	2	9	7	18 (40.0)
③	3	8	9	20 (44.4)
計	8 (17.8)	20 (44.4)	17 (37.8)	45

（　）内は反応率

問３は，標本の分布と，標本平均の分布に関する問題であり，複数の選択肢から適切と判断したものを１つ選択させるとともに，そう判断した理由を記述するように求めた。

問３(1)で適切判断をするためには，「標本の大きさが大きければ，標本の分布は母集団分布とほぼ同じ形状になる。」というルールを適用する必要がある。

【問３】　下のグラフは，あるテスト得点の母集団分布である。この母集団は平均値 60.4，中央値 62.8，標準偏差 6.404 です。母集団分布のグラフの下にある A から D までの 4 つのグラフは，この母集団から無作為抽出した標本の分布を示しています。



(1) どのグラフが，この母集団から無作為抽出した大きさ 1000 の標本の分布を示していますか。そう判断した理由も簡潔に述べてください。

(2) どのグラフが，この母集団から無作為抽出した大きさ 50 の標本 1000 個の標本平均の分布を示していますか。そう判断した理由も簡潔に述べてください。

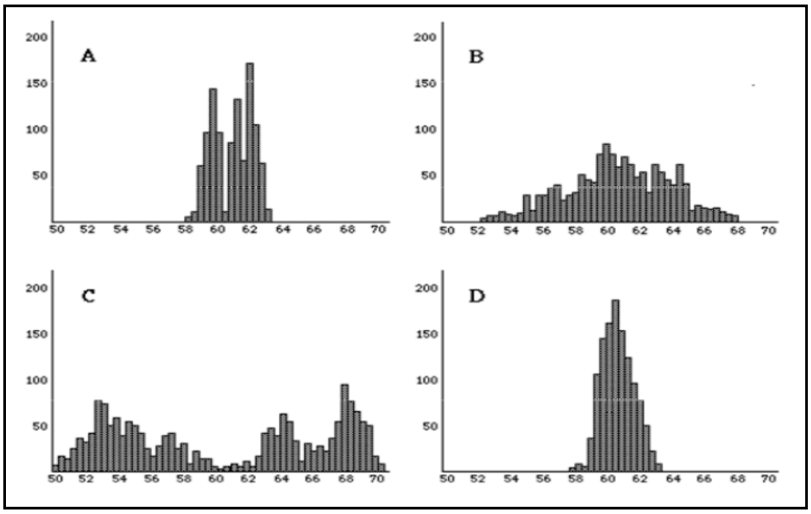


図５　得点分布問題

表５　問 3(1)に対する反応

選択肢	A	B	C （正答）	D	計
度数 （反応率）	5 （11.1）	6 （13.3）	34 （75.6）	0 （0.0）	45

表６　問 3(2)に対する反応

選択肢	A	B	C	D (正答)	計
度数 (反応率)	7 (15.6)	11 (24.4)	9 (20.0)	18 (40.0)	45

問 3(1)で，正答 C の反応率は 75.6%であった．この結果は，かなり多くの学習者は，標本の大きさが大きければ，標本の分布は母集団分布とほぼ同じ形状になるというルールを適用して適切判断ができることを示している。

問 3(2)で適切判断をするためには，「標本平均の変動性」と「標本平均の分布の正規近似」のルールを適用する必要がある。

標本の大きさが 50 のとき，標本平均の期待値と標準偏差は，

$$E(\bar{x}) = 60.4 \qquad s(\bar{x}) = \frac{6.404}{\sqrt{50}} \cong 0.906$$

そして, 標本の大きさが 50 なのでやや小さいが, 母集団分布の形状は複峰型であるにも関わらず, 標本平均の分布は，近似的に正規分布に従う単峰型になる。

問 3(2)の正答 D の反応率は 40.0%であった。問 3(2)で，誤答 A，B，C の反応をした理由を分析して，標本平均の分布に関する学習者の誤判断とその要因を検討する。

グラフ A は，母集団分布と同じ形状であり，散らばりを縮小したグラフとみなせる。誤答Aの反応をした 7 名には，次のような記述がみられた。

ア「中心に集まっているから。」(4 名)

イ「中心に集まっていて，真ん中に空きがあるから。」

ウ「標本の大きさが 50 で小さいので，正規分布にならないから。」(2 名)

ア，イの記述は,「標本平均の変動性」のルールを適用しているが,「標本平均の分布の正規近似」のルールは適用していないと考えられる。

ウの記述は, 標本の大きさが 50 では小さいため, 近似的に正規分布に従うとはいえないという判断をしたと考えられる。

グラフ B は，近似的に正規分布に従う形状であり，散らばりは母集団と変わらないグラフとみなせる。誤答 B の反応をした 11 名には，次のような記述がみられた。

エ「平均だったら，グラフに山ができるはずだから。」(7 名)

オ「母平均に近い値が多く，散らばりも大きいから。」(3 名)

カ「標本の大きさが大きくないため，ばらつきが出るから。」

エ，オの記述は，「標本平均の分布の正規近似」のルールを適用しているが，「標本平均の変動性」のルールは適用していないと考えられる。

カの記述は，標本の大きさが 50 では小さいとみなして，「標本平均の変動性」の前件を否定したルールを適用したと考えられる。

グラフ C は，母集団分布と同じ形状であり，散らばりは母集団と変わらないグラフとみなせる。誤答 C の反応をした 9 名には，次のような記述がみられた。

キ「母集団のグラフと同じようだから。」（6 名）

ク「無作為抽出なので，標本のばらつきは母集団のばらつきになるから。」（3 名）

キ，クの記述は，「標本平均の変動性」と「標本平均の分布の正規近似」のどちらのルールも適用せず，「標本平均の分布は，母集団分布とほぼ同じ形状になる。」という誤判断（以降「標本平均の誤判断」という。）をしたと考えられる。

討論

本研究では次の 2 つの仮説を設定した。

仮説 1：標本比率の性質を指導すれば，標本比率の散らばりに関する問題に対して，学習者は適切判断ができるだろう。

仮説 2：標本平均の性質を指導すれば，標本平均の散らばりに関する問題に対して，学習者は適切判断ができるだろう。

まず，仮説 1 について検証する。

事後調査問 1，問 2 の結果から，標本比率の性質を指導すれば，標本比率の散らばりに関する問題に対して，半数近い学習者は適切判断ができると考えられた。事後調査問 1，問 2 の結果をクロス集計すると，問 1 では正答し，問 2 では誤答③の反応をした対象者が 9 名（全体の 20%）であった（表 7）。問 2 の問題場面には，適切判断を阻害する要因が含まれている可能性があるといえる。

問 1 の問題場面は，標本抽出の回数が 1 回であり，問 2 の問題場面は，標本抽出の回数が多数回であった。Evans and Dusoir（1977）は，産科病院問題について，「1 年を通して多くの日で（on most days recorded in a year)」と，「ある日に（on one day)」という 2 つの条件設定で群を分けて，男の子の割合が 60%以上になる確率が高い病院の方を選択させた。その結果，「1 年を通して多くの日で」よりも，「ある日に」という条件設定の方が，正答率は有意に高い結果を示した。このことから，標本抽出の回数が多数回であることは，適切判断を阻害する要因の一つであると推測される。

また，問 1 はキャンディー工場，問 2 は産科病院という問題場面であった。産科病院問題では，赤ちゃんの男女比が母集団でほぼ 1 対 1 であるという現実の知識を適用しやすい。そのため，標本比率の期待値と母比率との類似性に基づく代表性ヒューリスティック（Tversky and Karneman, 1974）を適用しやすいことは，適切判断を阻害する要因の一つであると推測される。

表７　事後調査問１と問２のクロス集計

問2 / 問1	①	②（正答）	③	計
①	0	1	1	2
②	2	2	2	6
③（正答）	4	16	9	29
④	0	0	0	0
⑤	2	1	5	8
計	8	20	17	45

次に，仮説２について検証する。

問3(1)で，約４分の３の対象者は，「標本の大きさが大きければ，標本の分布は母集団分布とほぼ同じ形状になる。」というルールを適用して適切判断をした。問3(2)で，４割の対象者は，「標本平均の変動性」と「標本平均の分布の正規近似」のルールを適用して適切判断をした。これらの結果から，標本平均の性質を指導すれば，標本平均の散らばりに関する問題に対して，半数近い学習者は適切判断ができると考えられた。

それでは，「標本平均の変動性」と「標本平均の分布の正規近似」のルールを適用せずに誤判断をする学習者に対して，どのような指導をすればよいだろうか。問3(2)で誤答A，B，Cを選択した理由の主な相違点は，「標本平均の変動性」と「標本平均の分布の正規近似」のルールのうち，どちらの性質を適用しなかったかという点である。誤答Aは「標本平均の分布の正規近似」のルールの不適用，誤答Bは「標本平均の変動性」のルールの不適用，誤答Cは両方のルールの不適用という違いがある。「標本平均の分布の正規近似」のルールを適用しない学習者には，直面する問題場面が，標本の分布を問うているか，あるいは標本平均の分布を問うているかを認識できるように指導する必要がある。また，「標本平均の変動性」のルールを適用しない学習者には，様々な問題場面で標本平均の性質を適用する経験を積み重ねることにより，散らばりの大きさに着目した適切判断ができるようになることが期待される（Fong, Krantz, & Nisbett，1986 ; Fong and Nisbett，1991）。本研究で，標本分布の性質の教授による効果を期待したが，半数近い学習者は適切判断ができるという結果に留まった。現代社会においては，統計を用いて適切判断ができる人間を育てる教育の必要性がますます高まっている。今後の課題は，標本分布の散らばりに関する適切判断を促進するための教授方略を構築し，その効果を検証することである。

付記

本研究は，科学研究費補助金基盤研究（C）（課題番号 22530990）及び統計数理研究所共同研究プログラム（22 共研 4101）の助成を受けている。

引用文献

Evans, J. St. B. T. & Dusoir, A. E. 1977. “Proportionality and sample size as factors in intuitive statistical judgment.” *Acta Psychologica*, **41**, 129-137.

Fong, G. T., Krantz, D. H. & Nisbett, R. E. 1986. “The effects of statistical training on thinking about everyday problems.” *Cognitive Psychology,* **18**, 253-292.

Fong, G. T., and Nisbett, R. E. 1991. “Immediate and delayed transfer of training effects in statistical reasoning.” *Journal of Experimental Psychology*, **120**, 34-45.

Garfield, J. and delMas, B. 2005. *Comprehensive Assessment of Outcomes for a first course in Statistics*. University of Minnesota.

Gilovich, T., Griffin, D. & Kahneman, D. (Eds.) 2002. *Heuristics and Biases*. Cambridge University Press.

Kahneman, D. and Tversky, A. 1972. “Subjective probability: A judgment of representativeness.” *Cognitive Psychology*, **3**, 430-454.

Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (Eds.) 1982. *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press.

文部科学省．2008.『中学校学習指導要領解説数学編』（教育出版）.

文部科学省．2009.『高等学校学習指導要領解説理数編』（実教出版）.

小口祐一．2008.「統計領域における誤った知識の保持状況に関する調査」『日本教授学習心理学会第4回年会予稿集』10-11.

小口祐一．2010.『実践から学ぶグラフ電卓による統計の指導』（学術図書出版青山社）.

Tversky, A. and Kahneman, D. 1974. “Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.” *Science*, **185**, 1124-1131.

丹慶勝市．2003.『図解雑学統計解析』（ナツメ社）.