

中学校数学における文字式の〈学び〉に関する一考察

— 数学における具体的思考から抽象的思考へ移行の問題 —

菊地利幸*

(2020年1月8日受理)

Toshiyuki KIKUCHI

キーワード: 文字式、中学数学、抽象化

1 はじめに

数学の文字式に関する学習は、教科名称が「算数」から「数学」に変わり、子どもの思考性が具体から抽象へと変わっていく中学校段階に行われている。しかしながら、中学生にとって文字式の理解はなかなか難しく、それが生徒の数学を学んでいく上での一つの大きな壁になっているとも言われている。

平成30年度全国学力・学習状況調査の中学校数学において、数学A問題の中に、文字式の計算とその利用に関する問題が出題されているが(図1)、正解を導き出した反応率は49.2%であった。この事例が示すように、数学を得意でないとする生徒の多くは文字式や指数を含めた計算が十分に理解できていない者も多く、筆者の経験でもその傾向が強いように思われる。

以上のことを考慮に入れて、本研究では、中学・高校における文字式の学習のあり方と課題について考えてみたい。

2 全国学力・学習状況調査における「文字式」問題について

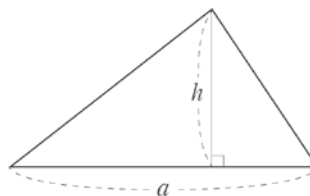
すでに指摘したように、平成30年度の全国学力・学習状況調査の文字式の問題だが、この種の問49.2%であり、改善の傾向は見られるが、学習課題が解決されたとは言い難い正答率である(なお、図中の「反応率」とは小数第二位を四捨五入したもので反応率の合計と正答率が一致しない場合や合計が100%にならない場合がある)。

*茨城大学全学教職センター

(図1) 問題A 2 文字式の計算とその利用 (4)

(4) 右の図で、底辺の長さ a 、高さ h の三角形の面積 S は、次のように表されます。

$$S = \frac{1}{2} ah$$



底辺の長さを求めるために、この式を、 a について解きなさい。

この問題は、以下に示すように中学校学習指導要領の中学2年生の「A 数と式」の領域・内容から出題されたものである。

〔第2学年〕A 数と式 具体的な事象の中に数量の関係を見だし、それを文字を用いて式に表現したり式の意味を読み取ったりする能力を養うとともに、文字を用いた式の四則計算ができるようにする。

ウ目的に応じて、簡単な式を変形すること。

数と式の学習は、中学2年生の数学では、最初の方で学ぶものだが、すでに中学1年生の文字を用いて式に表すことの意味を十分に理解していないと解答できないものである。表1は、この問題を解いた中学生が間違っただけで解答した例をまとめたものである。それを見ると式変形を理解していないで解答していないケースが散見され、様々な誤答が見られる。

表1 問題(4)の解答類型と反応率

1. 解答類型と反応率

問題番号	解答類型	反応率 (%)	正答
② (4)	1 $\frac{2S}{h}$ と解答しているもの。	49.2	◎
	2 $2S - h$ と解答しているもの。	1.7	
	3 $2Sh$ と解答しているもの。	2.7	
	4 $\frac{S}{2h}$ と解答しているもの。	2.1	
	5 $\frac{1}{2}Sh$ と解答しているもの。	7.2	
	6 $S - \frac{1}{2}h$ と解答しているもの。	0.9	
	7 $\frac{S}{h}$ と解答しているもの。	1.7	
	8 $\frac{h}{S}$ と解答しているもの。	0.7	
	99 上記以外の解答	19.1	
	0 無解答	14.8	

なぜこのような誤答をする中学生が多いのであろうか。その要因は様々考えられるが、要因の一つには文字を使って具体的な数値を抽象的に捉える能力が十分に育成されていないことがあげられる。ここでは先ずこの問題を論究する前提として数学における抽象的表現とは何かに関する若干の考察を行っておきたい。

3 数学における抽象的表現のあり方

一般に数学を理解するためには、一語一語、一文一文の単位で、記号が表している意味を理解し、それらが組み合わされている数学の内容を、抽象度の低い具体的な事柄に置き換えて把握する必要がある。数学における抽象的表現は、①図による表現、②言葉による表現、③記号による表現の3つの方法があると言われているが、先述したように文字と式の関係性を理解するには、「③記号による表現」ができることが前提となる。

そもそも記号概念は、具体的な数値から抽象化、一般化の過程を通して発展してきたと言われている。さらに記号は、その抽象化や一般化の記述手段として創り出され、定着が図られてきたと言っている。最初は、単なるメモのためなどに使われていたと考えられる記号であるが、その内容が豊かになるにつれ、数学記号はそれ自体で体系をもったひとつの存在となり、数学を他の学問から区別するひとつの特色にまでなったと言われている(福原、1981、154~156頁)。

さらに、その有用性としては、以下に示す5点があげられよう。

- (1) 簡潔性
- (2) 厳密性
- (3) 思考を助ける
- (4) 一般化と一般考察を可能にする
- (5) 新たな数学概念の形成、新たな数学問題の誕生に寄与する

最後の(5)については、義務教育段階の子どもたちには理解が難しい面があるかもしれないが、他の4つは、学習次第では理解可能であるように思う。

また記号の有用性としては、社会で共通に認められた内容を簡潔に表現し、それらを的確に用いることによって、思考のプロセスが短縮され、コミュニケーションの効率性が高まることがあげられる。特に数学においては記号が大きな役割を果たしていることは言うまでもない。記号は、抽象的で形式的であるだけに、操作がしやすく、しかもより一般性を持つものである。さらに記号体系をうまく作ることができれば、現実の意味を離れて形式的な操作が可能になり、思考を能率的に進めることができるようになる。このように、数学において記号の使い方に慣れることで、思考を、より正確に、よりの確に、より能率的に行うことができるようになると言われている。このような記号が持つ特性については、新学習指導要領においても学ぶべき重要性が指摘されている。

平成29年の小学校学習指導要領解説算数編では「数学の用語・記号については、各領域における具体的な内容の学習を通して、用語・記号の意味や内容が十分に理解でき、用語・記号を用いることよき、すなわち、簡潔さ、明瞭さ、そして、的確さについて把握できるように指導する必要がある。つまり、用語・記号が具体的な内容から離れ、形式的な指導に陥ったりすることのないようにしなくてはならない。」とされている。さらに平成29年の中学校学習指導要領解説第2章数学

科の目標及び内容第2節数学科の内容においては、次のように指摘されている。少し長いが引用しておきたい。

⑤文字を用いた式 現実の世界における事象を数学の世界における関係として記述し処理する手段として文字を用いた式がある。文字を用いた式の使い方には、次の二つの側面がある。

ア 現実の世界における事象の中の数量や数量の関係などを文字や記号で表現する

イ 新たに表現し直し解釈しやすい形に整える

アには、現実の世界における事象の中の数量や数量の関係などを、数学の世界において考察できるようにする役割があり、その主要な内容として、多項式、方程式、関数などがある。ここでは、日常生活や社会の事象の中の数量や数量の関係などを数や式を用いて表現するなど数学化する方法を習得することが必要になる。このように、日常生活や社会の事象における数量や数量の関係を数学の記号で記述することができれば、その処理を形式的に取り扱うことができる。

また、イは、文字を用いた式には思考を更に発展させ創造的な思考を促すという側面があることを意味している。文字を用いた式で表現することによって本質的な関係をより簡潔かつ明瞭に捉えることができるとともに、それを表現し直して新たな関係を見いだしたり変形したりすることで問題解決の糸口が見いだされることもある。こうした文字を用いた式の働きを理解し、問題解決の場面で活用できるようにすることが大切である。

学習指導要領では以上のようにその重要性が述べられているが、注意したいのは、小学校段階では、具体的な学習内容を学んでいくことを通して、用語・記号の意味や内容が理解することにとどまっており、それを使いこなしていくまでは求めてはいない点である。ところが中学校に入ると、「文字を用いた式で表現することによって本質的な関係をより簡潔かつ明瞭に捉える」ことや、さらにその表現を捉えなおして新たな関係性を発見したり、「変形したりすること」を学ぶ必要が指摘されている。したがって用語・記号の学習に関しては、小学校から中学校へと進む中で、とりわけ用語や記号を操作していくことが新たな課題として設定されることになる。用語・記号をこのように扱うには、新たな思考段階を経ていく必要があり、こうした段階に上がっていくことを全ての子ともが容易にできるわけではなく、思考のつまずきを経験する子は多いように思われる。冒頭でみた全国学力・学習状況調査の結果は、そのようなつまずきを表しているようにも思われる。それでは小・中学校の学習指導要領解説において「文字式」がどのように説明されているだろうか。

4 小学校学習指導要領解説に見る「文字式」の説明

小学校学習指導要領解説では、「文字式」については以下のような説明がなされている。

(1) 2 学年

足し算と引き算「はじめにリンゴがいくつかあって、5 こもったら 12 こになりました。はじめは幾つありましたか」

① 図で

図2 足し算と引き算を図で表す

はじめの数 □		「はじめにリンゴが幾つかありました」
はじめの数 □	もらった数 5こ	「5こもらいました。」
はじめの数 □	もらった数 5こ	「12こになりました。」
ぜんぶの数12こ		

② 文字式で $\square - 5 = 12$

(2) 3 学年

除法 ある数量をもう一方の数量の幾つ分であるか（包含除）とある数量をとうぶんしたときにできる1つ分の大きさを求める（等分除）がある。

$3 \times \square = 12$ 、 \square にあてはまる数は何だろう。

(3) 第4 学年

①四則に関して成り立つ性質 \square や \triangle などの記号を用いた式に一般的に表し、整理して理解する

(交換法則) $\square + \triangle = \triangle + \square$ 、 $\square \times \triangle = \triangle \times \square$

(分配法則) $\square \times (\triangle + \bigcirc) = \square \times \triangle + \square \times \bigcirc$ 、 $\square \times (\triangle - \bigcirc) = \square \times \triangle - \square \times \bigcirc$

$(\square + \triangle) \times \bigcirc = \square \times \bigcirc + \triangle \times \bigcirc$ 、 $(\square - \triangle) \times \bigcirc = \square \times \bigcirc - \triangle \times \bigcirc$

(結合法則) $\square + (\triangle + \bigcirc) = (\square + \triangle) + \bigcirc$ 、 $\square \times (\triangle \times \bigcirc) = (\square \times \triangle) \times \bigcirc$

②言葉の式（長方形の面積）=（縦）×（横）（又は（横）×（縦））

(5) 第5 学年

伴って変わる2つの数量

「横の長さが6cmと決まっている場合の長方形の縦の長さ」と面積 $6 \times \square = \triangle$

(6) 第6 学年

数量を表す言葉や未知数や変数などを \square 、 \triangle などを用いて表す代わりに、 a 、 x などの文字を用いて式に表す。

以上が、小学校における文字式等の扱った事例である。筆者自身も実際に、小学校6年生の担任の時に、 \square を用いた式から x を用いた式を発展学習で取り入れ、1次方程式を解かせることを実施した。文字の利用による式へ対応については、概ね算数が得意で、好きである児童はきちんと解くことができていた。

5 中学校における文字式の指導と生徒のつまずきについて

ところが中学校に入ると第1学年において、「A数と式」の(2)文字を用いた式で、数量の関係や法則などを、文字を用いて式に表したり、式の意味を読み取ったり、文字を用いた式の計算をしたりして、文字を活用することが頻繁に行われるようになる。

こうした学習によって、子どもたちは、算数から数学へ、具体化から抽象化へそして一般化への数学の世界への学びに入っていくことになるのだが、この節目の時期が、用語・記号を考える数学的思考性の転換の時期であるのではないだろうか。そのため、具体的な数から文字式への橋渡しとして、「文字の意味や役割」についてのイメージ化を図る指導が極めて重要になると言われている。

杜威は、「文字は文字式の世界に入ってから数の代わりに使うために新しく導入されたものであり、文字式は数と文字を計算記号や関係記号やまた（）で正しく結び付けることによって、数量や数量関係を表すものである。」（1991、42 - 45 頁）と指摘しており、文字と文字式を次のような学びのあり方を述べている。すなわち、①計算記号×を省略するか、または・で代用すること。②計算記号÷の代わりに分数の横線を使うこと。③数と文字、数と括弧を掛けるとき、数を前に書くこと。④文字の係数の絶対値は1 である場合、その1 を省略すること。⑤一般的に、文字をアルファベット順に書くこと。⑥文字の指数を文字の右上に書き、指数が1 である場合、その指数を省略すること、である。

このような思考のプロセスが、数と文字に因果関係を生み、数から文字への拡張を認識していくことになるのだが、生徒たちはこの6つの学びのあり方をまずきちんと理解しないと混乱が生じることになる。そのような混乱が、多くの中学生が抽象的思考についていけないつまずきとなっているように思われる。そのため、指導する側の十分な説明が必要であるし、生徒がどのレベルまで理解しているのかを把握する必要がある。

さらに、杜威は、文字式の文字の意味として、「定数」、「未知数」、「変数」の3つあるとした。すなわち、「定数」とは「ある決まった数値」、「未知数」とは「決まっているが、まだその値が分からない数値」、「変数」とは「ある範囲の中で、変わっていく値」として使用されると定義している。「生徒は文字式における文字を定数、一般数もしくは変数として捉えてしまうために混乱を招いてしまう。文字を多義的に扱うことができれば、数学の他の領域において柔軟に思考を巡らすことができる。文字一つ一つの意味を認識して文字の多義性を区別し、その多義性を柔軟に考える思考が重要である。」（1991、52-53 頁）と述べている。

以上の指摘を考慮すれば、小学校においては、□や△で表されていた数式を、中学校でaやxなどの記号に移行する際、それらが数量を表しているということへの気づきや意識を持たせることは、上述した子どもたちのつまずきを乗り越えさせるために重要であると思う。そのための第一歩は、具体から抽象へ、□から文字へ個々の生徒が考えを新たに表現し直していけるよう教師の側で日常生活や社会の現象などで数や式を用いて表現する場面をつくっていくことも大切になる。

特に中学生が文字式を理解していくためには、杜威の述べているように計算記号の学ぶ際に生徒が文字式のルールを習熟していく必要がある。元々、文字は1つには数量を表しているものであり、便宜上、a その他の記号を使って表している。そのことを生徒に理解させ、認識してもらい、文字の使用のルールに次第に慣れていくことが重要であるが、ただそのプロセスが単なる計算練習のような訓練になってしまえば意味がない。生徒が興味を持ち、彼らのモチベーションを高める工夫を教師の側で努力する必要がある。そのためには、数学を日常生活の諸場面において活用できる体験活動等の工夫も考えられるだろう。

しかし他方で、生徒たち数学的思考が、具体から抽象へ、数字から文字・記号へと移行させるための演習やプリント学習等を通じて学習も軽視はできないだろう。その際に大切なのは、その都度時間を取って、文字と文字式の計算のルールの確認をしていくことは重要であろう。例えば、①乗法記号×の省略は(数) × (文字) の間でも可能である。 $(-4) \times a = -4a$ ②除法記号÷は $\times 1/\square$ で、乗法乗法を統一して考える。 $a \div 5 = a \times 1/5 = a/5$, ③乗除が入っている計算 $a \div b \times c$ は順番に、④ $(-1) \times a = -a$ など、決められた規則などの確認をその都度していくことが文字式の知識・技能の定着につながる。

さらに、文字と文字式の指導については、

- ①文字や文字式の有用性を感じ取れる指導をすすめたい。
- ②どのような場合に文字を使ったらよいか生徒が理解できるように指導する。
- ③文字を使って式を作らせる際、そこに使われている文字が何を表しているのか

等、生徒が文字の使用になれ、親しめるような指導に配慮する必要がある。生徒が身の回りの具体的なことや面倒なことを文字の使用によってうまく表現することで文字使用の有用性につながる。

三輪は、「文字式の文字は数や数量を表し、演算の印しと規則は算術のそれと同じである。しかしながら、算術の数の式と文字式の間には違いがある。生徒が数学の授業で文字式に始めて出会うとき、彼らは普通、以前の算術学習の経験に依拠する。生徒の以前の経験は確かに役立つが、実際にミスコンセプションや誤解を引き起こす。」(2001、10-12 頁) と述べている。

中学校2年生では、文字を用いて式に表現したり、目的に応じて式を変形してことを学ぶ。具体的な場面での文字式の扱いにも対応できるようになる。本研究で取り上げた問題は、数学にとどまらず理科のオームの法則等にも関連してくる。このような具体的な問題で、目的に応じて式変形できることを生徒に実感させたい。

6 中学校・高等学校における文字式と関連がある学習内容について

上述したように、中学校における文字式の学習についてみてきたが、文字式の利用による数学の抽象化や一般化は高等学校における数学記号の常用化へとつながる。中学校での文字式の意味や加減乗除を含めた四則計算の仕方を理解することは高等学校数学の根本的な基礎事項・基礎技能であり、高等学校での「数学」学習の理解に大いに影響がある。

改めて、中学校と高等学校の学習内容の関連についてまとめたのが(表2)である。

表2 中学校・高等学校の学年と文字式の関連ある学習内容

学年	学習内容
中学第1学年	文字を用いた式、比例、反比例
中学第2学年	文字を用いた四則計算、連立二元一次方程式、一次関数
中学第3学年	式の展開と因数分解、二次方程式、関数 $y=ax^2$
高校第1学年	I 数と式、二次関数
高校第2学年	II いろいろな式、図形と方程式、微分・積分の考え、B 数列

7 おわりに

冒頭でも触れたように、本研究で取り上げた平成30年度全国学力・学習状況調査の問題は、具体的な場面での関係を表す式を、目的に応じて変形できるかどうかを見る問題であった。反応率から見ると、無回答を含め目的に応じて式変形できない生徒が、50.8%であり、2つ以上の文字を含む等

式を目的に応じて式変形できるようにすることが十分にできない生徒が多いことが分かる。

このような傾向は、平成 21 年度の同様の問題にも見られており、それは正答率 45.7%であることが示している。平成 30 年度の正答率は、確かにこの時よりは伸びているが、高校進学率が 98% (平成 31 年度) を超えようとする中、中学校段階でのつまづきは、高校の数学教育にも影響を与えている。数学が得意でない生徒の多くは、文字の 1 つ 1 つの定義、そして文字式の変形等基礎的技能的習熟が不十分であること明らかであることは否めない。そういう生徒たちには、改めて丁寧な指導をするための多様な教育方法的な工夫が必要であるだろう。中学校における文字式の指導の工夫や文字の持つ意味・抽象性・利便性を、生徒たちにより具体的に日常生活にも深く関わる課題に取り組みさせることによって、生活に密着した学習テーマに取り組みすることで文字式の変形を理解できるような数学指導を進めていく必要があるだろう。

新しい学習指導要領においては、教科横断的な指導があげられているが、文字式については理科との関連においても重要な役割を担っており、文字式のもつ多様性・一般性についても深化させていく指導の必要性もあるように思う。

8 引用文献

国立教育政策研究所 (2018) 『平成 30 年度全国学力・学習状況調査報告書 (中学校数学)』 文部科学省.

長岡亮介 (1996) 「数学と記号」『数学セミナー』 日本評論社.

福原満洲男他 (1981) 『数学と日本語』 共立出版.

三輪辰郎 (2001) 「文字式の指導に関する重要な諸問題」. 『筑波数学教育研究』 第 20 号.

杜威 (1991) 『学校数学における文字式の学習に関する研究: 数の世界から文字の世界へ』 東洋館.

文部科学省 (2017) 『小学校学習指導要領 (平成 29 年告示) 解説算数編』.

文部科学省 (2017) 『中学校学習指導要領 (平成 29 年告示) 解説数学編』.

文部科学省 (2018) 『高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 解説数学編 理数編』.